UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON SORBONNE

CENTRE DE RECHERCHE

S.A.M.O.S

STATISTIQUE APPLIQUEE ET MODELISATION STOCHASTIQUE

Schémas de discrétisation anticipatifs et estimation du paramètre d'une diffusion

S. SOUCHET

Prépublication du SAMOS n° 72
Mai 1997

90, rue de Tolbiac - 75634 PARIS CEDEX 13

Schémas de discrétisation anticipatifs et estimation du paramètre d'une diffusion

Sandie SOUCHET
SAMOS, Université Paris 1*

Juillet 97

Résumé
Soit Y une diffusion unidimensionnelle ergodique, dont la fonction de dérive $f(\theta, Y)$ dépend d'un paramètre inconnu θ_0. Notre but est d'estimer θ_0 à partir d'une observation du processus $(Y_{k\delta})_{k=0,n}$, avec δ proche de 0 mais fixé, lorsque n tend vers l'infini. Dans ce but, nous adaptons la méthode d'estimation des Moments Généralisés (Hansen) adaptés au schéma d'approximation discret et anticipatif du trapèze, puis au schéma de Simpson. Sous certaines conditions générales sur la diffusion, le schéma du trapèze (resp. de Simpson) fournit un estimateur asymptotiquement normal et efficace à un biais (explicite) en δ^2 (resp. δ^4) près. Ces résultats généralisent ceux obtenus par Bergstrom [1], pour une diffusion gaussienne et le schéma du trapèze.

Abstract
Let Y be a one-dimensional ergodic diffusion process, the drift of which $f(\theta, Y)$ depends on an unkown parameter θ_0. Our aim is to estime θ_0 from the observation of the process $(Y_{k\delta})_{k=0,n}$, for fixed δ near 0, as n goes to infinity. For that purpose, we adapt the Generalized Method of Moments to the anticipative and approximative discrete trapezoidal scheme, and then to Simpson's. Under some general assumptions on the diffusion process, the trapezoidal scheme (respectively Simpson's scheme) provides us with an asymptotically normal and efficient estimator with a bias in δ^2 (resp. δ^4). These results generalize Bergstrom's [1], which are obtained for a Gaussian diffusion process and the trapezoidal scheme.

Mots clefs
Schéma du trapèze, de Simpson;schéma anticipatif; diffusion ergodique; estimation par variables instrumentales; Méthode des Moments Généralisés; biais d'estimation; efficacité asymptotique.

Classification A M S
62 M 05 - 62 F 12.

1 Introduction

Nous abordons dans ce travail le problème de l'estimation du paramètre de la fonction de dérive (drift) d'une diffusion ergodique observée à pas δ, constant et petit.

*Centre Pierre Mendès France, 90, rue de Tolbiac 78634 PARIS cedex 13

Ce problème a fait l'objet de nombreux travaux, que l'on peut classer en fonction du cadre d'analyse choisi pour l'obtention des propriétés asymptotiques.

Si l'on note $[0, T]$ l'intervalle d'étude, on peut supposer que l'on dispose d'une observation continue de la trajectoire du processus. Dans ce cas, l'estimateur du maximum de vraisemblance est consistant, asymptotiquement normal et efficace avec la vitesse $\sqrt{T}$, lorsque T tend vers l'infini [14].

Cependant, le recours à une observation discrète du processsus parait plus réaliste. Là encore, on se doit de distinguer le cas d'un pas d'observation constant $\delta > 0$ de celui où les temps d'observation sont asymptotiquement denses dans $\mathbb{R}^+$.
Dans un cadre asymptotique du type $T = nh_n \to \infty$, $h_n \to 0$, $nh_n^p \to 0$, des auteurs tels que N. Yoshida [20]et V. Genon-Catalot [6] proposent des procédures d'estimation optimales issues de la discrétisation de la vraisemblance continue. On peut également citer M. Kessler, qui donne une approximation gaussienne de la vraisemblance [11], et A.R. Pedersen, qui propose une méthode d'évaluation numérique des densités de transition tout en controlant les propriétés théoriques de l'estimation [16] [17].

Dans le cas où le pas d'observation δ est constant, D. Dacunha-Castelle et D. Florens-Zmirou [4] ont prouvé que l'estimateur du maximum de vraisemblance est consistant et asymptotiquement efficace à la vitesse $\sqrt{n\delta}$, quand $n \to \infty$. Mais on ne dispose pas, en général, de la forme analytique des densités de transition du processus : un autre point de vue est de considérer des estimateurs issus de fonctions d'estimation martingales ou non (voir B.M. Bibby et M. Sorensen [2], M. Kessler [12], [13]; [19]).
Une troisième approche consiste à construire des contrastes à partir d'un schéma approchant le schéma discret exact [5].
Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dY_t = f(\theta_0, Y_t)\, dt + \sigma(Y_t)\, dW_t,\ Y_0 = x \tag{1}$$

où f et σ sont des fonctions connues et θ_0 est le paramètre à estimer. La relation entre deux observations à pas δ est donc, sous sa forme intégrée:

$$Y_{k\delta} = Y_{(k-1)\delta} + \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} f(\theta_0, Y_t)\, dt + \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \sigma(Y_t)\, dW_t$$

Dans [5], D. Florens-Zmirou utilise l'approximation $\delta f\left(\theta_0, Y_{(k-1)\delta}\right)$ de l'intégrale $\int_{(k-1)\delta}^{k\delta} f(\theta_0, Y_t)\, dt$ et obtient ainsi le schéma d'Euler:

$$Y_{k\delta} = Y_{(k-1)\delta} + \delta f\left(\theta_0, Y_{(k-1)\delta}\right) + \eta_{k\delta} + \tilde{W}_{k\delta}$$

Sous certaines hypothèses, $\left(\tilde{W}_{k\delta}\right)_{k\geq 0}$ est une suite de variables centrées, de carré intégrable, et $\eta_{k\delta}$ est une variable en $O\left(\delta^2\right)$ qui correspond à l'erreur commise en approchant l'intégrale. Par minimisation du contraste des moindres carrés pour le schéma d'Euler approché, on obtient une estimation de θ_0 avec un biais de l'ordre de δ.

Cependant, des résultats d'analyse classique nous montrent qu'il existe des méthodes plus fines permettant d'approcher des intégrales, méthodes où l'erreur commise est inférieure à un $O\left(\delta^2\right)$.On peut citer en particulier, la méthode du trapèze (méthode à deux points), de Simpson (méthode à trois points) ou encore celle de Bode (méthode à cinq points), qui donnent respectivement, sous de bonnes conditions de régularité pour f (voir [15], p.132-133):

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+\delta} f(x)dx &= \frac{\delta}{2}\left(f(a)+f(a+\delta)\right)+O\left(\delta^3\right)\\
\int_a^{a+2\delta} f(x)dx &= \frac{\delta}{3}\left(f(a)+4f(a+\delta)+f(a+2\delta)\right)+O\left(\delta^5\right)\\
\int_a^{a+4\delta} f(x)dx &= \frac{\delta}{45}\left(14f(a)+64f(a+\delta)+24f(a+2\delta)+64f(a+3\delta)+14f(a+4\delta)\right)+O\left(\delta^7\right)
\end{aligned}$$

D'où l'idée de transposer ces approximations à notre contexte, à savoir construire de nouveaux schémas d'approximation en les couplant à une méthode d'estimation adaptée afin d'obtenir un biais d'un ordre supérieur à δ et ceci, sans perte d'efficacité.

La paternité de cette idée revient aux économètres (cf. Bergstrom [1], Sargan [18]): utilisant le schéma du trapèze couplé avec une estimation par variable instrumentale (V.I.), ils obtiennent un controle du biais en δ^2 pour une diffusion gaussienne multidimensionnelle ergodique de dérive $f(\theta, Y_t) = Y_t\ \theta$. Nous allons montrer que sous des conditions très générales sur la diffusion, le schéma anticipatif du trapèze (resp. de Simpson) couplé à la méthode d'estimation des moments généralisés (E.M.G.) (L. Hansen [8],[9]; [7]) permet, comme dans le cas gaussien, d'affiner le contrôle du biais qui est alors en δ^2 (resp. δ^4), cela sans perte d'efficacité.

Dans le paragraphe 2, nous présenterons les schémas (exacts) obtenus en utilisant l'approximation du trapèze et de Simpson pour l'intégrale $\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} f(\theta, Y_v)\, dv$.

La section 3 sera consacrée à l'étude des propriétés asymptotiques de l'estimateur issu de l'utilisation de ces schémas d'approximation couplés à la méthode d'estimation par variable instrumentale, dans le cas particulier où la dérive $f(y)\theta$ est linéaire en θ. Nous généraliserons ces résultats dans le paragraphe 4, pour une dérive quelconque $f(\theta, y)$, en introduisant la méthode des moments généralisés.

La section 5 sera consacrée à l'étude expérimentale des résultats précédents pour trois modèles de diffusion particuliers.

2 Présentation des schémas d'approximation

Notons A le générateur associé à (1) défini pour $h \in C^2$ par $Ah = f\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}h$. $M^{c,loc}$ désigne l'espace des martingales locales continues et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, la filtration naturelle associée à l'e.d.s. (1) ([10]). On notera g' la dérivée de g en x et $l = m, r$ se lit $l \in \{m, \cdots, r\}$.

Propriété 1 : Schéma du trapèze
Supposons que:

1. $f\ \in C^4$ *et* $\sigma\ \in C^2$
2. $\forall l = 0, 1,\ \left(\int_0^t \left[\left(A^l f\right)' \sigma\right](Y_v)\, dW_v\right)_{t\geq 0} \in M^{c,loc}$

Alors, $\forall t \geq 0$,

$$Y_{t+\delta} = Y_t + \frac{\delta}{2}\left(f\left(Y_t\right) + f\left(Y_{t+\delta}\right)\right) + \eta_t + \tilde{W}_t \tag{2}$$

avec:

$$\begin{aligned} \eta_t &= \frac{1}{2}\int_t^{t+\delta} (t+\delta-v)(t-v)\, A^2 f\left(Y_v\right) dv \\ \tilde{W}_t &= \int_t^{t+\delta} \sigma\left(Y_v\right)\left[1 + \frac{1}{2}(t+\delta-v)(t-v)(Af)'\left(Y_v\right) + \left(\frac{\delta}{2}+t-v\right) f'\left(Y_v\right)\right] dW_v \end{aligned}$$

Si de plus, pour $l = 0, 1$, $E\left(\int_0^t \left[\left(A^l f\right)' \sigma\right]^2 \left(Y_v\right) dv\right) < +\infty$ *et* $E\left(\int_0^t \sigma^2\left(Y_v\right) dv\right) < \infty$, *alors* $\left(\tilde{W}_t\right)_{t\geq 0}$ *est une suite de variables de carré intégrable, telles que* $E\left(\tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_t\right) \overset{p.s.}{=} 0$

Démonstration:
La démonstration repose sur le résultat suivant d'interversion de l'ordre d'intégration entre intégrale de Riemann et intégrale stochastique : soit $\left(\int_0^t J_v dW_v\right)_{t\geq 0}$ un élément de $M^{c,loc}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$; alors, on obtient, par application de la formule de Ito pour les martingales locales [10]:

$$\int_t^{t+\delta} \left(\int_v^{t+\delta} f(u)du\right) J_v dW_v = \int_t^{t+\delta} \left(\int_t^u J_v dW_v\right) f(u)du$$

Posons:

$$\begin{aligned} R_t &= \int_t^{t+\delta} f\left(Y_v\right) dv - \frac{\delta}{2}\left(f\left(Y_t\right) + f\left(Y_{t+\delta}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_t^{t+\delta} \left[f\left(Y_v\right) - f\left(Y_t\right)\right] dv - \frac{1}{2}\int_t^{t+\delta} \left[f\left(Y_{t+\delta}\right) - f\left(Y_v\right)\right] dv \end{aligned}$$

Par application de la formule de Ito, on obtient,

$$\begin{aligned} R_t = &\ \frac{1}{2}\int_t^{t+\delta} \left[\int_t^v Af\left(Y_u\right) du\right] dv + \frac{1}{2}\int_t^{t+\delta} \left[\int_t^v \left(f'\sigma\right)\left(Y_u\right) dW_u\right] dv \\ - &\ \frac{1}{2}\int_t^{t+\delta} \left[\int_v^{t+\delta} Af\left(Y_u\right) du\right] dv - \frac{1}{2}\int_t^{t+\delta} \left[\int_v^{t+\delta} \left(f'\sigma\right)\left(Y_u\right) dW_u\right] dv \end{aligned}$$

Le résultat d'interversion des intégrales nous donne,

$$R_t = \int_t^{t+\delta} \left(t + \frac{\delta}{2} - u\right) Af\left(Y_u\right) du + \int_t^{t+\delta} \left(t + \frac{\delta}{2} - u\right) \left(f'\sigma\right)\left(Y_u\right) dW_u$$

Or,

$$\int_t^{t+\delta} \left(t + \frac{\delta}{2} - u\right) du = 0$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{2}-u\right)Af(Y_u)\,du &= \frac{1}{2}\int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{2}-u\right)[Af(Y_u)-Af(Y_t)]\,du \\ &- \frac{1}{2}\int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{2}-u\right)[Af(Y_{t+\delta})-Af(Y_u)]\,du\end{aligned}$$

De manière similaire, on obtient,

$$\begin{aligned}\int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{2}-u\right)Af(Y_u)\,du &= \int_t^{t+\delta}(t+\delta-v)(t-v)A^2f(Y_v)\,dv \\ &+ \int_t^{t+\delta}(t+\delta-v)(t-v)\left((Af)'\sigma\right)(Y_v)\,dW_v\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire,

$$Y_{t+\delta}=Y_t+\frac{\delta}{2}\left(f(Y_t)+f(Y_{t+\delta})\right)+R_t+\int_t^{t+\delta}\sigma(Y_v)\,dW_v$$

ce qui n'est autre que le schéma du trapèze (2). □

On constate que la variable d'erreur η_t est en $O(\delta^3)$, ce qui est conforme au résultat de l'approximation d'une intégrale ordinaire par la méthode du trapèze.

De même, la transposition de la méthode de Simpson à notre problème, donne un résultat conforme à celui attendu, à savoir, η_t, la variable d'erreur, est un $O(\delta^5)$.

Propriété 2 : Schéma de Simpson
Supposons que :

1. $f\in C^8$ *et* $\sigma\in C^6$
2. $\forall l=0,3$, $\left(\int_0^t\left[\left(A^lf\right)'\sigma\right](Y_v)\,dW_v\right)_{t\geq 0}\in M^{c,loc}$

Alors, $\forall t\geq 0$,

$$Y_{t+2\delta}=Y_t+\frac{\delta}{3}\left(f(Y_t)+4f(Y_t+\delta)+f(Y_t+2\delta)\right)+\eta_t+\tilde{W}_t \tag{3}$$

avec:

$$\begin{aligned}\eta_t &= \frac{1}{4!}\int_t^{t+\delta}(v-t)^3\left(v-t-\frac{4\delta}{3}\right)A^4f(Y_v)\,dv \\ &+ \frac{1}{4!}\int_{t+\delta}^{t+2\delta}(t+2\delta-v)^3\left(t+\frac{2\delta}{3}-v\right)A^4f(Y_v)\,dv \\ \tilde{W}_t &= \tilde{W}_t^1+\tilde{W}_t^2 \\ \tilde{W}_t^1 &= \int_t^{t+\delta}\sigma(Y_v)\left[1+\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k(v-t)^k}{(k+1)!}\left(t+\frac{(k+1)\delta}{3}-v\right)\left(A^kf\right)'(Y_v)f'\right]dW_v \\ \tilde{W}_t^2 &= \int_{t+\delta}^{t+2\delta}\sigma(Y_v)\left[1+\sum_{k=0}^{3}\frac{(t+2\delta-v)^k}{(k+1)!}\left(t+2\delta-\frac{(k+1)\delta}{3}-v\right)\left(A^kf\right)'(Y_v)f'\right]dW_v\end{aligned}$$

Si de plus, pour $l = 0,3$, $E\left(\int_0^t \left[\left(A^l f\right)' \sigma\right]^2 (Y_v)\, dv\right) < +\infty$ *et* $E\left(\int_0^t \sigma^2 (Y_v)\, dv\right) < \infty$, *alors* $\left(\tilde{W}_t^1\right)_{t\geq 0}$ *et* $\left(\tilde{W}_t^2\right)_{t\geq 0}$ *sont des suites de variables de carré intégrable, qui vérifient* $E\left(\tilde{W}_t^1 \mid \mathcal{F}_t\right) \overset{p.s.}{=} 0$ *et* $E\left(\tilde{W}_t^2 \mid \mathcal{F}_{t+\delta}\right) \overset{p.s.}{=} 0$

La démonstration de cette propriété est donnée en annexe A.

3 Le cas d'une dérive linéaire en θ : Schéma du trapèze et Estimation par V.I.

Pour l'estimation basée sur le schéma d'Euler issu de (15) (cf.[5]), le contraste employé est celui des moindres carrés. Si nous utilisons le schéma d'approximation du trapèze dérivé de (2) (propriété 1), le choix des moindres carrés conduirait à un biais dans la procédure d'estimation : en effet, dans ce cas, le résidu $\varepsilon_t = \eta_t + \tilde{W}_t$ est corrélé avec la variable explicative $\frac{\delta}{2}\left(f_\theta(Y_t) + f_\theta(Y_{t+\delta})\right)$, puisque celle-ci anticipe sur la valeur du processus en $t+\delta$. Il faut donc procéder autrement.

Dans le cas où le modèle est linéaire en θ, une méthode alternative classique utilisée en économétrie est l'estimation par *variable instrumentale* (notée par la suite V.I., cf. [7]) : pour un bon choix de *l'instrument*, instrument que l'on substitue à la variable explicative corrélée au résidu, elle fournit une estimation convergente du paramètre , là où les moindres carrés conduisent à une estimation avec un biais systématique.

Bergstrom et Sargan ([1], [18]) ont eu l'idée d'utiliser le schéma du trapèze associé à une méthode d'estimation par V.I., pour estimer le paramètre d'une diffusion gaussienne multidimensionnelle, $dY_t = Y_t.\theta_0\, dt + dW_t$. Dans ce cas, la dérive $y.\theta$ est doublement linéaire, en θ et en y. Dans ce paragraphe, nous examinerons le cas où la dérive s'écrit $f(y).\theta$, sans hypothèses de linéarité en y. Il est intéressant de mettre l'accent sur cet exemple à plusieurs titres:

- Il permet, d'une part, de comprendre le choix du contraste qui sera retenu dans le cas général d'une dérive $f_\theta(y)$, sans condition de linéarité ni en θ ni en y. Comme nous le verrons au paragraphe 4, ce choix (estimation des moments généralisés, E.M.G.) coincidera avec l'estimation par V.I. dans le cas linéaire en θ.

- D'autre part, dans le cas linéaire, les hypothèses (notées H 1) assurant de bonnes propriétés asymptotiques sont simplifiées par rapport au cas général.

- Enfin, la linéarité permet d'obtenir une expression explicite et linéaire dans les observations, de l'estimateur par V.I., ce qui rend la méthode numériquement simple.

3.1 La méthode d'estimation par variables instrumentales

Considérons l'e.d.s. définie par :

$$dY_t = (f(Y_t).\theta_0)\, dt + \sigma(Y_t)\, dW_t = \left(\sum_{i=1}^{p} f_i(Y_t)\,\theta_0^i\right) dt + \sigma(Y_t)\, dW_t,\ Y_0 = x$$

Notons pour $i = 1, p$ et $k = 1, n$:

$$X_k^i = \frac{\delta}{2} \frac{\left(f_i\left(Y_{k\delta}\right) + f_i\left(Y_{(k-1)\delta}\right)\right)}{\sigma\left(Y_{(k-1)\delta}\right)}, \; X_k = \left(X_k^1, \cdots, X_k^p\right), \; X =^t \left(X_1, \cdots, X_n\right)$$

$$Y_k = \frac{Y_{k\delta} - Y_{(k-1)\delta}}{\sigma\left(Y_{(k-1)\delta}\right)}, \qquad Y =^t \left(Y_1, \cdots, Y_n\right)$$

Dans le schéma d'approximation du trapèze dérivé du schéma exact (2) , la variable explicative X_k et le bruit blanc $\tilde{W}_k$ sont corrélés, ce qui conduit à un biais dans la méthode d'estimation des moindres carrés (E.M.C.) : l'E.M.C. $\theta_n = \left({}^tXX\right)^{-1}\left({}^tXY\right)$ doit être adaptée.

La méthode d'estimation par V.I. consiste à remplacer la variable explicative X_k par un *instrument* $\tilde{X}_k$ décorrélé de $\tilde{W}_k$, mais bien lié à X_k. Dans le cas présent, il est naturel de choisir $\tilde{X}_k = \left(\tilde{X}_k^1, \cdots, \tilde{X}_k^p\right)$ avec $\tilde{X}_k^i = \frac{f_i\left(Y_{(k-1)\delta}\right)}{\sigma\left(Y_{(k-1)\delta}\right)}$. Comme on le verra, ce choix est bon, car il permet de préserver, à un facteur $(I_p + \varepsilon(\delta))$ près, l'efficacité asymptotique de l'estimation. L'estimateur θ_n^I par V.I. est (cf.[1], [7]) :

$$\theta_n^I = \left({}^t\tilde{X}X\right)^{-1}\left({}^t\tilde{X}Y\right)$$

Si on note i, l'indice des lignes et j, celui des colonnes

$$\begin{aligned} {}^t\tilde{X}X &= \left(\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f_i\left(Y_{(k-1)\delta}\right)}{\sigma^2\left(Y_{(k-1)\delta}\right)}\left(f_j\left(Y_{(k-1)\delta}\right) + f_j\left(Y_{k\delta}\right)\right)\right]\right)_j^i \\ {}^t\tilde{X}Y &= \left(\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f_i\left(Y_{(k-1)\delta}\right)}{\sigma^2\left(Y_{(k-1)\delta}\right)}\left(Y_{k\delta} - Y_{(k-1)\delta}\right)\right]\right)_i \end{aligned}$$

3.2 Résultats asymptotiques

Nous donnerons ici une preuve succinte de ces résultats, qui seront démontrés dans le cas général dans le paragraphe 4.
On notera $f_\theta = f.\theta$ et $s(x, \theta_0) = \exp\left(-2\int_{x_0}^{x} \frac{f_{\theta_0}(y)}{\sigma^2(y)}dy\right)$, la fonction d'echelle associée à l'équation (1).

Hypothèses H 1 : Schéma du trapèze, dérive linéaire en θ

H 1.1 *f_{θ_0} est de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ et σ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. De plus, il existe $K > 0$ et $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ telles que,*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; |f_{\theta_0}(x) - f_{\theta_0}(y)| \leq K|x-y|, \; |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x-y|^\alpha$$

Sous cette hypothèse, (1) admet une unique solution $(Y_t)_{t\geq 0}$ adaptée.

H 1.2

$$\int_0^{\infty} s(x,\theta_0)dx = \int_{-\infty}^{0} s(x,\theta_0)dx = \infty \ \text{et} \ \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(x,\theta_0)\,\sigma^2(x)\right]^{-1} dx = C(\theta_0) < \infty$$

$(Y_t)_{t\geq 0}$ est alors récurrente positive sur $\mathbb{R}$ pour $\theta = \theta_0$, de loi invariante :

$$\mu_{\theta_0}(dy) = \left[C(\theta_0)\, s(y,\theta_0)\,\sigma^2(y)\right]^{-1} dy$$

H 1.3 *Il existe deux constantes $C > 0$ et $M > 0$ telles que :*

$$\forall |x| > M, \ \left(\frac{f_{\theta_0}(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2}\sigma'(x)\right) sign(x) \leq -C$$

H 1.4 *La loi invariante μ_{θ_0} admet des moments de tous ordres et vérifie :*

$$\forall p \geq 0, \ \int \frac{|x|^p}{\sigma^4(x)} d\mu_{\theta_0}(x) < \infty$$

De plus, pour $\pi^t_{\theta_0}(x,dy) = P(Y_t \in dy \mid Y_0 = x)$ et $Q^t_{\theta_0} = \mu_{\theta_0} \otimes \pi^t_{\theta_0}$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que:

$$\sup_{t\in[0,\delta_0]} \int \frac{|y|^p}{\sigma^4(x)} dQ^t_{\theta_0}(x,y) < \infty$$

H 1.5 *Pour tout $i = 1,p$, les fonctions f_i, f_i', $(A_{\theta_0} f_i)'$ et $A^2_{\theta_0} f_i$ sont à croissance polynômiale en x.*

H 1.6 *Pour tout i,j, les fonctions suivantes sont continues au voisinage de 0:*

$$\begin{aligned} M_{i,j}(v) &= E_{\theta_0}\left[\frac{f_i(Y_0)\,f_j(Y_v)}{\sigma^2(Y_0)}\right], \ N_i(v) = E_{\theta_0}\left[\frac{f_i(Y_0)}{\sigma^2(Y_0)}\left(A^2_{\theta_0} f_{\theta_0}(Y_v)\right)\right] \\ Q_{i,j}(v) &= E_{\theta_0}\left[(f_i f_j)(Y_0)\,\frac{\left(\sigma^2 f'_{\theta_0}\right)(Y_v)}{\sigma^4(Y_0)}\right], \ P_{i,j}(v) = E_{\theta_0}\left[(f_i f_j)(Y_0)\,\frac{\sigma^2(Y_v)}{\sigma^4(Y_0)}\right] \end{aligned}$$

$P_{i,j}$ étant de plus continuement différentiable au voisinage de 0.
On note $P_{\theta_0} = \left(P'_{i,j}(0)\right)_i^j$, $N_{\theta_0} = (N_i(0))_i$ et $H_{\theta_0} = (M_{i,j}(0))_i^j$.

H 1.7 *H_{θ_0} est inversible.*

Cette dernière condition permet d'assurer l'existence de θ_δ, le vecteur solution du système linéaire,

$$\left[{}^t\tilde{X}Y\right]^\delta - \frac{\delta}{2}\left[{}^t\tilde{X}X\right]^\delta.\theta = 0 \tag{4}$$

où,

$$\left[{}^t\tilde{X}Y\right]^\delta = \left(E_{\theta_0}\left[f_i(Y_0)\left(\frac{Y_\delta - Y_0}{\sigma^2(Y_0)}\right)\right]\right)_i \ \text{et} \ \left[{}^t\tilde{X}X\right]^\delta = \left(E_{\theta_0}\left[M_{i,j}(\delta) + M_{i,j}(0)\right]\right)_i^j$$

Nous utiliserons à plusieures reprises le résultat d'ergodicité et de normalité asymptotique suivant (cf. lemme 3.2 de [2], et [5]) :

Lemme 1 *Sous (H 1.1),(H 1.2) et (H 1.3), si $g\ :\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ vérifie $Q^{\delta}_{\theta_0}(g^2)<\infty$, alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(Y_{k\delta},Y_{(k-1)\delta}\right)\overset{L^2(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} Q^{\delta}_{\theta_0}(g)$$

Si de plus, $\pi^{\delta}_{\theta_0}(g)=0$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} g\left(Y_{k\delta},Y_{(k-1)\delta}\right)\overset{\mathcal{D}(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} N\left(0,Q^{\delta}_{\theta_0}\left(g^2\right)\right)$$

Théorème 1 *Sous (H 1), pour H_{θ_0}, P_{θ_0} et N_{θ_0} définies en (H 1.6), on a, lorsque δ est proche de 0 et $n\to+\infty$:*

$$\theta^I_n\overset{P_{\theta_0}}{\longrightarrow}\theta_\delta\qquad et\qquad \sqrt{n\delta}\left(\theta^I_n-\theta_\delta\right)\overset{\mathcal{D}(P_{\theta_0})}{\longrightarrow}N_p\left(0,V\left(\theta_0\right)\right)$$

avec:

$$\begin{aligned}\theta_\delta-\theta_0 &= -\frac{1}{12}H^{-1}_{\theta_0}N_{\theta_0}\delta^2+o\left(\delta^2\right)\\ V\left(\theta_0\right) &= H^{-1}_{\theta_0}\left(I_p+\frac{\delta}{2}P_{\theta_0}H^{-1}_{\theta_0}+\delta\varepsilon\left(\delta\right)\right)\end{aligned}$$

Comme nous l'avons souligné, H_{θ_0} étant l'information de Fisher, l'efficacité asymptotique est préservée à un biais en δ près.
<u>Démonstration</u>:

1. La convergence de θ^I_n vers θ_δ repose sur l'application du lemme 1. En effet, $\frac{1}{n}{}^t\tilde{X}X\overset{L^2(P_{\theta_0})}{\rightarrow}\frac{\delta}{2}\left[{}^t\tilde{X}X\right]^\delta$ et ${}^t\tilde{X}Y\overset{L^2(P_{\theta_0})}{\rightarrow}\left[{}^t\tilde{X}Y\right]^\delta$.
   Or, $\theta^I_n-\theta_\delta=\left({}^t\tilde{X}X\right)^{-1}\left({}^t\tilde{X}Y-{}^t\tilde{X}X\theta_\delta\right)$. Donc, pour θ_δ, solution de (4), θ^I_n converge en probabilité vers θ_δ.

2. L'écart entre θ_δ et θ_0 se calcule en utilisant la décomposition du trapèze (2) :

$$\begin{aligned}\theta_\delta &= \left(\frac{\delta}{2}\left[{}^t\tilde{X}X\right]^\delta\right)^{-1}\left[\frac{\delta}{2}\left[{}^t\tilde{X}X\right]^\delta.\theta_0+B\right]=\theta_0+\left(\frac{\delta}{2}\left[{}^t\tilde{X}X\right]^\delta\right)^{-1}B\\ \text{avec } B &= \left(E_{\theta_0}\left[f_i\left(Y_0\right)\frac{\eta_0}{\sigma^2\left(Y_0\right)}\right]\right)_i=-\frac{\delta^3}{12}N_{\theta_0}+o\left(\delta^3\right)\end{aligned}$$

   Le détail de ce calcul sera donnée lors de la démonstration du théorème 3. De plus, $\frac{\delta}{2}\left[{}^t\tilde{X}X\right]^\delta=\delta H_{\theta_0}+o\left(\delta\right)$, on a donc le résultat annoncé pour le biais asymptotique.

3. On utilise de nouveau le lemme 1 pour prouver la normalité asymptotique de l'estimateur. Celle-ci résulte directement des résultats suivants :

$$\sqrt{n\delta}\left(\theta^I_n-\theta_\delta\right)=\left({}^t\tilde{X}X\right)^{-1}\sqrt{n\delta}\left({}^t\tilde{X}Y-{}^t\tilde{X}X\theta_\delta\right)$$

avec

$$\sqrt{n\delta}\left({}^t\tilde{X}Y -{}^t\tilde{X}X\theta_\delta\right) \overset{\mathcal{D}(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} N_p\left(0, \delta\Gamma\left(\theta_\delta\right)\right), \qquad \Gamma\left(\theta_\delta\right) = H_{\theta_0} + P_{\theta_0}\frac{\delta}{2} + o\left(\delta^2\right)$$

$${}^t\tilde{X}X \overset{P_{\theta_0}}{\longrightarrow} \frac{\delta}{2}\left[{}^t\tilde{X}X\right]^\delta = \delta H_{\theta_0} + o(\delta)$$

le calcul de $\Gamma\left(\theta_\delta\right)$ étant donné dans l'annexe C. □.

4 Le cas d'une dérive générale : Schéma du trapèze et Estimation des Moments généralisés

Notons :

$$\mathcal{V}_\delta ={}^t\left(\mathcal{V}_\delta^1, \cdots, \mathcal{V}_\delta^p\right), \quad \mathcal{V}_\delta^i(y,x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta^i}f_\theta(x)\left(\frac{y - x - \frac{\delta}{2}\left(f_\theta(x) + f_\theta(y)\right)}{\sigma^2(x)}\right) \tag{5}$$

Et

$$V_n\left(\theta\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{V}_\delta\left(Y_{k\delta}, Y_{(k-1)\delta}, \theta\right)$$

On va utiliser la méthode d'estimation des moments généralisés (E.M.G.), introduite par L. Hansen ([9] [8]; voir aussi [7]), qui généralise au cas non linéaire la méthode des V.I.. L'estimateur des moments généralisés, $\widehat{\theta}_n$, associé à $\mathcal{V}_\delta$ et à la matrice identité de dimension p est défini par :

$$\widehat{\theta}_n = \min_\theta U_n\left(\theta\right), \qquad U_n\left(\theta\right) ={}^t V_n\left(\theta\right) I_p V_n\left(\theta\right) = \left\|V_n\left(\theta\right)\right\|_2^2$$

On vérifie aisément que θ_n^I et $\widehat{\theta}_n$ coincident dans le cas d'un modèle linéaire, puisque alors $U_n\left(\theta_n^I\right) = 0$. Sans hypothèse de linéarité en θ, nous allons montrer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur convergent vers θ_δ, asymptotiquement normal et efficace, oú θ_δ est l'unique solution, lorsqu'elle existe, de l'équation $E_{\theta_0}\left[\mathcal{V}_\delta\left(Y_\delta, Y_0, \theta_\delta\right)\right] = 0$.

4.1 Propriétés asymptotiques

Pour étudier les propriétés asymptotiques de $\widehat{\theta}_n$, nous nous baserons sur un jeu d'hypothèses très général, noté (H 2), qui étend (H 1).

Soit Θ, un sous ensemble de $\mathbb{R}^p$, $\theta_0 \in \mathring{\Theta}$. Notons, pour tout $i = 1, p$

$$V_\delta^i\left(\theta\right) = E_{\theta_0}\left[\mathcal{V}_\delta^i\left(Y_{k\delta}, Y_{(k-1)\delta}, \theta\right)\right], \quad V_n^i\left(\theta\right) = \frac{1}{n}\mathcal{V}_\delta^i\left(Y_{k\delta}, Y_{(k-1)\delta}, \theta\right) \tag{6}$$

Hypothèses H 2 : Schéma du trapèze et E.M.C.

H 2.1 -.2 -.3 -.4 -.7 *(H 1.1)-(H 1.4) sont maintenues, ainsi que (H 1.7).*

H 2.5 1. *Pour tout x, $\theta \to f_\theta(x)$ est de classe C^4 sur Θ et cette fonction, ainsi que ses dérivées partielle successives jusqu'à l'ordre 4, sont à croissance polynômiale en x, uniformément sur Θ.*

2. *f'_{θ_0}, $(A_{\theta_0} f_{\theta_0})'$ et $A^2_{\theta_0} f_{\theta_0}$ sont à croissance polynômiale en x.*

H 2.6 *(H 1.6) est maintenue en remplaçant f_i par $\frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta_0}$.*

On note encore : $H_{\theta_0} = (M_{i,j}(0))_i^j$, $N_{\theta_0} = (N_i(0))_i$ et $P_{\theta_0} = \left(P'_{i,j}(0)\right)_i^j$.

H 2.8 *Θ est un compact de $\mathbb{R}^p$.*

H 2.9 *Il existe un unique $\theta_\delta \in \overset{\circ}{\Theta}$ tel que pour tout $i = 1, p$, $V_\delta^i(\theta_\delta) = 0$.*

Dans le cas linéaire, (H 1.7) implique (H 2.9). Une différence importante entre les deux groupes d'hypothèses est que dans (H 2), on introduit des contraintes d'uniformité en θ (H 2.5). Ces conditions sont automatiquement vérifiées pour les modèles linéaires. L'ensemble des résultats qui suivent sont établis pour $\delta \leq \delta_0$ (H 2.4).

Nous commencerons par montrer que le cadre choisi s'inscrit dans celui de l'estimation par minimum de contraste défini dans [3] (définition 3.2.7.).

Lemme 2 *Sous (H 2), $U(\theta) = \sum_{i=1}^p \left(V_\delta^i(\theta)\right)^2$ est la fonction de contraste associée au processus de contraste $U_n(\theta)$.*

Démonstration:

- Par définition $\theta \to U(\theta)$ est une fonction positive, qui admet un unique minimum en θ_δ, d'après (H 2.9).

- (H 2.4) et (H 2.5) impliquent que $\mathcal{V}_\delta^i(y, x, \theta) \in L^2\left(Q_{\theta_0}^\delta\right)$. Donc, sous (H 2.2)-(H 2.3), on obtient, par application du lemme 1, et pour tout $i = 1, p$,

$$\forall \theta \in \Theta,\ V_n^i(\theta) \overset{L^2(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} V_\delta^i(\theta)$$

D'où,

$$\forall \theta \in \Theta,\ U_n(\theta) \overset{L^1(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} U(\theta)$$

$U_n(\theta)$ et $U(\theta)$ vérifient bien les conditions de la définition 3.2.7. de [3].
□

4.1.1 Etude de la convergence de $\widehat{\theta}_n$

Théorème 2 *Sous (H 2),* $\widehat{\theta}_n \overset{P_{\theta_0}}{\longrightarrow} \theta_\delta$

Démonstration:
La démonstration repose sur le théorème 3.2.8. de [3] dans lequel l'hypothèse 2 est remplacée par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{\eta \searrow 0} \lim_{n \to \infty} P_{\theta_0} \left(\sup_{\|\theta-\beta\|_\infty \leq \eta} |U_n(\theta) - U_n(\beta)| > \varepsilon \right) = 0 \tag{7}$$

Modification qui ne change rien à la preuve de ce théorème.

- Sous (H 2.4) et (H 2.5), $\theta \to V_\delta^i(\theta)$ et $\theta \to V_n^i(\theta)$ sont de classe C^3; il en est donc de même pour $U_n(\theta)$ et $U(\theta)$.
- Il nous reste à vérifier l'hypothèse (7) sur le module de continuité de U_n. Pour tout (θ, β) tels que $\|\theta - \beta\|_\infty \leq \eta$, on a:

$$|U_n(\theta) - U_n(\beta)| \leq \sum_{i=1}^{p} \left| \left(V_n^i(\theta)\right)^2 - \left(V_n^i(\beta)\right)^2 \right| \leq 2 \sum_{i=1}^{p} \left[\left(\sum_{j=1}^{p} D_n^{i,j} \right) C_n^i \right] \eta$$

avec:

$$\begin{aligned} D_n^{i,j} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{\partial}{\partial \theta^j} \mathcal{V}_\delta^i \left(Y_{k\delta}, Y_{(k-1)\delta}, \theta\right) \right| \\ C_n^i &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \mathcal{V}_\delta^i \left(Y_{k\delta}, Y_{(k-1)\delta}, \theta\right) \right| \end{aligned}$$

Or, sous (H 2.4) et (H 2.5), on a:

$$\begin{aligned} (y, x) &\to \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{\partial}{\partial \theta^j} \mathcal{V}_\delta^i (y, x, \theta) \right| \in L^2 \left(Q_{\theta_0}^\delta\right) \\ (y, x) &\to \sup_{\theta \in \Theta} \left| \mathcal{V}_\delta^i (y, x, \theta) \right| \in L^2 \left(Q_{\theta_0}^\delta\right) \end{aligned}$$

Par application du lemme 1, on obtient,

$$\begin{aligned} D_n^{i,j} &\overset{L^2(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} D^{i,j} = E_{\theta_0} \left[\sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{\partial}{\partial \theta^j} \mathcal{V}_\delta^i (Y_\delta, Y_0, \theta) \right| \right] \\ C_n^i &\overset{L^2(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} C^i = E_{\theta_0} \left[\sup_{\theta \in \Theta} \left| \mathcal{V}_\delta^i (Y_\delta, Y_0, \theta) \right| \right] \end{aligned}$$

C^i et $D^{i,j}$, étant indépendantes de θ. Donc,

$$\sum_{i=1}^{p} \left[\left(\sum_{j=1}^{p} D_n^{i,j} \right) C_n^i \right] \overset{L^1(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} 2 \sum_{i=1}^{p} \left[\left(\sum_{j=1}^{p} D^{i,j} \right) C^i \right]$$

Or, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall \eta > 0$,

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}\left(\sup_{\|\theta-\beta\|_\infty \le \eta} |U_n(\theta) - U_n(\beta)| > \varepsilon\right) &\le P_{\theta_0}\left(2\sum_{i=1}^{p}\left[\left(\sum_{j=1}^{p} D_n^{i,j}\right) C_n^i\right]\eta > \varepsilon\right) \\ &\le \frac{2\eta}{\varepsilon} E_{\theta_0}\left[\left|\sum_{i,j} D_n^{i,j} C_n^i - \sum_{i,j} D^{i,j} C^i\right|\right] \\ &\quad + \frac{2\eta}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} D^{i,j}\right) C^i \end{aligned}$$

La condition (7) est bien vérifiée.

4.1.2 Evaluation de l'écart $\theta_\delta - \theta_0$

Théorème 3 *Sous (H 2), on a pour H_{θ_0} et N_{θ_0} définies en (H 2.6) :*

$$\theta_\delta = \theta_0 + B_{\theta_0}\delta^2 + o\left(\delta^2\right) \quad \textit{avec } B_{\theta_0} = -\frac{1}{12} H_{\theta_0}^{-1} N_{\theta_0}$$

Démonstration:
On va utiliser le lemme suivant qui est démontré en annexe B :

Lemme 3 *Sous (H 2), $\theta \to V_\delta^i(\theta)$ est de classe C^3 sur Θ, et si $0 \le \delta \le \delta_0$, on a:*

$$\begin{aligned} \forall j = 1, p\ , \frac{\partial}{\partial \theta^j} V_\delta^i(\theta) &= E_{\theta_0}\left[\frac{\partial}{\partial \theta^j} \mathcal{V}_\delta^i(Y_\delta, Y_0, \theta)\right] \\ &= -\delta M_{i,j}(0) - \frac{\delta}{2}\left(M_{i,j}(\delta) - M_{i,j}(0)\right) + R(\theta, \delta) \end{aligned}$$

avec: $|R(\theta,\delta)| \le K\delta\left(\|\theta - \theta_0\| + \delta^2\right)$, K étant une constante positive, indépendante de θ et δ.

D'après ce résultat, pour tout i, $\theta \to V_\delta^i(\theta)$ est de classe C^3 sur Θ. Compte tenu de (H 2.9) et par application du théorème des accroissements finis, pour tout $i = 1, p$, on sait qu'il existe $t_i \in]0,1[$ tel que $\theta_\delta^* = t_i\theta_0 + (1 - t_i)\theta_\delta$ vérifie:

$$V_\delta^i(\theta_\delta) = 0 = V_\delta^i(\theta_0) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \theta^j} V_\delta^i(\theta_\delta^*)\left(\theta_\delta^j - \theta_0^j\right) \tag{8}$$

Donc, pour δ petit

$$\frac{\partial}{\partial \theta^j} V_\delta^i(\theta_\delta^*) = -\delta M_{i,j}(0) + o(\delta)$$

En outre, la décomposition du trapèze (2), le fait que $\tilde{W}_0$ est décorrélé de Y_0 et (H 2.6), nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} V_\delta^i(\theta_0) &= E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\eta_0}{\sigma^2(Y_0)}\right)\right] \\ &= -\frac{\delta^3}{2}\int_0^1 v(1-v)\,N_i(\delta v)dv \\ &= -\frac{\delta^3}{12}N_i(0)+o\left(\delta^3\right) \end{aligned}$$

(8) s'écrit donc pour δ suffisamment petit

$$0=-\frac{\delta^2}{12}N_{\theta_0}-(H_{\theta_0}+\varepsilon(\delta)).(\theta_\delta-\theta_0)$$

Avec (H 2.7), on obtient donc le résultat annoncé. □.

4.1.3 Normalité asymptotique de $\widehat{\theta}_n$

Théorème 4 *Sous (H 2), pour H_{θ_0} et P_{θ_0} définies en (H 2.6), on a, lorsque $n\to\infty$:*

$$\sqrt{n\delta}.\left(\widehat{\theta}_n-\theta_\delta\right)\overset{\mathcal{D}(P_{\theta_0})}{\longrightarrow}N_p(0,V(\theta_0)),\ \text{où}\ V(\theta_0)\ =\ H_{\theta_0}^{-1}\left(I_p+P_{\theta_0}H_{\theta_0}^{-1}\frac{\delta}{2}+o(\delta)\right)$$

H_{θ_0} étant l'information de Fisher asymptotique, $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur presque asymptotiquement efficace de θ_δ.
Démonstration:
Notons :

$$DU_n(\theta_\delta)=2DV_n(\theta_\delta).V_n(\theta_\delta),\ DV_n(\theta_\delta)=\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}V_n^k(\theta_\delta)\right)_j^k$$

$$D^2U_n(\theta)=\left(2\sum_{i=1}^p\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^k\partial\theta^j}V_n^i(\theta)\right)V_n^i(\theta)+2\sum_{i=1}^p\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}V_n^i(\theta)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^k}V_n^i(\theta)\right)\right)_j^k$$

$$R_n=\int_0^1\left(D^2U_n\left(\theta_\delta+s\left(\widehat{\theta}_n-\theta_\delta\right)\right)-D^2U_n(\theta_\delta)\right)ds$$

Par application de la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\sqrt{n\delta}DU_n\left(\widehat{\theta}_n\right)=0=\sqrt{n\delta}DU_n(\theta_\delta)+\left(D^2U_n(\theta_\delta)+R_n\right).\sqrt{n\delta}\left(\widehat{\theta}_n-\theta_\delta\right)$$

La normalité asymptotique de $\widehat{\theta}_n$ résultera des trois propriétés suivantes :

$$\sqrt{n\delta}DU_n(\theta_\delta)\overset{\mathcal{D}(P_{\theta_0})}{\longrightarrow}N_p(0,K(\theta_\delta)),\ K(\theta_\delta)=4\delta^4H_{\theta_0}^3+2\delta^5H_{\theta_0}P_{\theta_0}H_{\theta_0}+o\left(\delta^5\right)\qquad(9)$$

$$D^2U_n(\theta_\delta) \xrightarrow{P_{\theta_0}} 2\delta^2 H_{\theta_0} + o\left(\delta^2\right) \tag{10}$$

$$R_n \xrightarrow{P_{\theta_0}} 0 \tag{11}$$

1. Montrons la convergence faible (9). Il suffit de vérifier :

$$\sqrt{n\delta}V_n(\theta_\delta) \overset{\mathcal{D}(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} N_p(0, \delta\Gamma(\theta_\delta)) \text{ et } DV_n(\theta_\delta) \overset{L^2(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} -\delta H_{\theta_0} + o(\delta)$$

avec : $\Gamma(\theta_\delta) = \delta H_{\theta_0} + P_{\theta_0}\frac{\delta^2}{2} + o(\delta^2)$.

- $V_n(\theta_\delta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathcal{V}_\delta\left(Y_{k\delta}, Y_{(k-1)\delta}, \theta_\delta\right)$, où $\mathcal{V}_\delta$ est définie en (5), vérifie, sous (H 2.4) et (H 2.5), pour tout $T \in \mathbb{R}^p$

$$^tT.\mathcal{V}_\delta(y, x, \theta_\delta) = \sum_{i=1}^p T^i \mathcal{V}_\delta^i(y, x, \theta_\delta) \in L^2\left(Q_{\theta_0}^\delta\right)$$

Par application, du lemme 1, on obtient :

$$^tT.\sqrt{n\delta}V_n(\theta_\delta) \overset{\mathcal{D}(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} N\left(0, \delta^tT\Gamma(\theta_\delta)T\right),\ \Gamma(\theta_\delta) = \left(E_{\theta_0}\left[\mathcal{V}_\delta^i(Y_\delta, Y_0, \theta_\delta)\mathcal{V}_\delta^j(Y_\delta, Y_0, \theta_\delta)\right]\right)_i^j$$

Donc,

$$\sqrt{n\delta}V_n(\theta_\delta) \overset{\mathcal{D}(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} N_p(0, \delta\Gamma(\theta_\delta))$$

Il suffit alors d'utiliser le résultat suivant, démontré en annexe C :

Lemme 4 *Sous (H2), on a, pour tout δ dans un voisinage de 0,*

$$\Gamma(\theta_\delta) = \delta H_{\theta_0} + \frac{1}{2}P_{\theta_0}\delta^2 + o\left(\delta^2\right)$$

- La convergence en probabilité de $DV_n(\theta_\delta) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial\theta^j}\mathcal{V}_\delta^i\left(Y_{k\delta}, Y_{(k-1)\delta}, \theta_\delta\right)\right)_j^i$ est obtenue en appliquant le lemme 1. En effet, sous (H 2.4) et (H 2.5), $(y, x, \theta_\delta) \to \frac{\partial}{\partial\theta^j}\mathcal{V}_\delta^i(y, x, \theta_\delta) \in L^2\left(Q_{\theta_0}^\delta\right)$. En utilisant de plus le lemme 3, on a :

$$DV_n(\theta_\delta) \overset{L^2(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} \left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}V_\delta^i(\theta_\delta)\right)_j^i = -\delta H_{\theta_0} + o(\delta)$$

2. Montrons (10). On déduit, de ce qui précède, que :

$$^tV_n(\theta_\delta)V_n(\theta_\delta) = \left(\sum_{i=1}^p\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}V_n^i\frac{\partial}{\partial\theta^k}V_n^i\right)(\theta_\delta)\right)_j^k \overset{L^1(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} \delta^2 H_{\theta_0}^2 + o\left(\delta^2\right)$$

D'autre part, (H 2.4) et (H 2.5) impliquent pour tout (j,k)

$$(y,x,\theta_\delta) \to \frac{\partial^2}{\partial\theta^k\partial\theta^j}\mathcal{V}_\delta^i(y,x,\theta_\delta) \in L^2\left(Q_{\theta_0}^\delta\right)$$

Appliquant le lemme 1, on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^k\partial\theta^j}V_n^i(\theta_\delta) \overset{L^2(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} E_{\theta_0}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^k\partial\theta^j}\mathcal{V}_\delta^i(Y_\delta,Y_0,\theta_\delta)\right] < \infty$$

En outre, $V_n^i(\theta_\delta) \overset{L^2(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} V_\delta^i(\theta_\delta) = 0$. D'où :

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^k\partial\theta^j}V_n^i(\theta_\delta)\right)V_n^i(\theta_\delta) \overset{L^1(P_{\theta_0})}{\longrightarrow} 0$$

(10) est obtenu grâce à ces deux convergences L^1.

3. Il reste à établir (11). On sait que, sous (H 2), $U_n(\theta)$ est de classe C^3 sur Θ. Par application de la formule de Rolles, on a pour tout i et tout j

$$\left|\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^i\theta^j}U_n\left(\theta_\delta + s\left(\widehat{\theta}_n - \theta_\delta\right)\right) - \frac{\partial^2}{\partial\theta^i\theta^j}U_n(\theta_\delta)\right]ds\right| \leq \sum_{k=1}^{p}D_n^{i,j,k}\left|\widehat{\theta}_n^k - \theta_\delta^k\right|$$

Avec :

$$D_n^{i,j,k} = \sup_{\theta\in\Theta}\left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^k\partial\theta^j\partial\theta^i}U_n(\theta)\right|$$

Sous (H 4) et (H 5), $D_n^{i,j,k}$ est une variable positive, indépendante de θ qui converge en probabilté vers une constante finie (cela résulte de l'application du lemme 1). Par conséquent, la convergence en probabilité de $\widehat{\theta}_n$ vers θ_δ entraine celle de R_n vers 0.

Ces trois résultats impliquent la normalité asymptotique de $\widehat{\theta}_n$. $\square$.

4.2 Adaptation de la méthode au schéma de Simpson

La méthode d'estimation des moments généralisés peut être adaptée au schéma d'approximation de Simpson associé à la décomposition (3). On définit, pour tout $i = 1, p$

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_n^i(\theta) &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\widetilde{\mathcal{V}}_\delta^i\left(Y_{2k\delta}, Y_{2k\delta-1}, Y_{2(k-1)\delta}, \theta\right) \\
\widetilde{\mathcal{V}}_\delta^i(z,y,x,\theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta^i}f_\theta(x)\left(\frac{z - x - \frac{\delta}{3}\left(f_\theta(x) + 4f_\theta(y) + f_\theta(z)\right)}{\sigma^2(x)}\right)
\end{aligned}$$

On note alors, $\widetilde{U}_n(\theta) = \sum_{i=1}^{p}\left(\widetilde{V}_n^i(\theta)\right)^2$, et $\widetilde{\theta}_n = \arg\min_{\theta\in\Theta}\widetilde{U}_n(\theta)$, l'estimateur des moments généralisés. Moyennant quelques adaptations dans les hypothèses, on peut montrer que cet estimateur est convergent, à un biais en $O(\delta^4)$ près, asymptotiquement normal et efficace.

Hypothèses H 3 : Schéma de Simpson et E.M.C.

H 3.1 *(H 2.1) est maintenue avec* f_{θ_0} *et* σ*, respectivement de classe* C^8 *et* C^6.

H 3.2 -.3 -.4 -.7 -.8 *(H 2.2)-(H 2.4) sont maintenues, ainsi que (H 2.7),(H 2.8).*

H 3.5
1. *Pour tout* x, $\theta \to f_\theta(x)$ *est de classe* C^4 *sur* Θ *et cette fonction, ainsi que ses dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre 4, sont à croissance polynômiale en* x*, uniformément sur* Θ
2. *Pour tout* $k = 0,3$, $\left(A^k_{\theta_0} f_{\theta_0}\right)'$, *et* $A^4_{\theta_0} f_{\theta_0}$ *sont à croissance polynômiale en* x.

H 3.6 *(H 2.6) est maintenue en remplaçant* N_i *par*
$\widetilde{N}_i(v) = E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i} f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(A^4_{\theta_0} f_{\theta_0}(Y_v)\right)/\sigma^2(Y_0)\right]$ *et* N_{θ_0} *par* $\widetilde{N}_{\theta_0} = \left(\widetilde{N}_i(0)\right)_i$

H 3.9 *(H 2.9) est maintenue en remplaçant* $V^i_\delta(\theta)$ *par* $\widetilde{V}^i_\delta(\theta) = E_{\theta_0}\left[\widetilde{\mathcal{V}}^i_\delta(Y_{2\delta}, Y_\delta, Y_0, \theta)\right]$ *et* θ_δ *par* $\widetilde{\theta}_\delta$.

Théorème 5 *Sous (H 3), pour* H_{θ_0}, P_{θ_0} *et* $\widetilde{N}_{\theta_0}$ *définies en (H 3.6), on a, lorsque* $n \to \infty$ *:*

$$\widetilde{\theta}_n \xrightarrow{P_{\theta_0}} \widetilde{\theta}_\delta \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n\delta}\left(\widetilde{\theta}_n - \widetilde{\theta}_\delta\right) \xrightarrow{D(P_{\theta_0})} N_p\left(0, \widetilde{V}(\theta_0)\right)$$

avec:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}_\delta - \theta_0 &= -\frac{1}{180} H^{-1}_{\theta_0} \widetilde{N}_{\theta_0} \delta^4 + o\left(\delta^2\right) \\
\widetilde{V}(\theta_0) &= H^{-1}_{\theta_0}\left(I_p + P_{\theta_0} H^{-1}_{\theta_0} \frac{\delta}{2} + o(\delta)\right)
\end{aligned}$$

5 Etude expérimentale

Ce paragraphe est consacré à la mise en oeuvre des résultats obtenus précédemment pour trois modèles de diffusion. Pour les deux premiers (Ornstein-Uhlenbeck, (O.U.) et Cox-Ingersoll-Ross, (C.I.R.)) la dérive est linéaire dans le paramètre et affine en x. Pour le troisième (L.N.), la fonction de dérive $f_\theta(x) = \theta x \ln(x) + \frac{1}{2}x$ n'est plus linéaire en x. D'autre part, outre les méthodes du Trapèze et de Simpson, il est possible d'utiliser le schéma de Bode à cinq points (cf. paragraphe 1). Bien que nous n'ayons pas étudié l'estimateur des moments généralisés associé, son comportement asymptotique est notifié pour les trois modèles choisis.
Nous indicerons par e, t, s et b, les quantités se rapportant respectivement au schéma d'Euler, du trapeze, de Simpson et de Bode. On va vérifier expérimentalement quelques unes des propriétés annoncées pour $\widehat{\theta}_n$: convergence vers θ_δ, écart entre $\widehat{\theta}_n$ et θ_0, biais théorique et empirique, variance asymptotique. Pour cela, on simule la diffusion sur un intervalle $[0, T]$, en utilisant un schéma d'Euler sur une grille fine de pas 0.01. Puis, on estime le paramètre par la méthode des moments généralisés pour les schémas t, s, b et

par les moindres carrés pour e, ceci pour un choix (δ, n), $n\delta = T$, avec $\delta = 0.05, 0.1, 0.5$ et $T = 200$. On repète 1000 fois cette expérience afin de calculer la moyenne et la variance empiriques, notées respectivement $m\left(\widehat{\theta}_n\right)$ et $S^2\left(\widehat{\theta}_n\right)$.

5.1 Processus de Ornstein-Uhlenbeck

On considère l'e.d.s. suivante:

$$dY_t = -\theta_0 Y_t dt + dW_t,\ Y_0 = x \tag{12}$$

(12) admet une unique solution forte, à trajectoires continues,

$$Y_t = \exp(-\theta_0 t)\left(x + \int_0^t \exp(\theta_0 s)\, dW\right)$$

$\pi_{\theta_0}^t(x,.)$ est donc une loi normale $N\left(x\exp(-\theta_0 t), \frac{1-\exp(-2\theta_0 t)}{2\theta_0}\right)$.
Si $\theta_0 > 0$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ est récurrente positive sur $\mathbb{R}$, de loi invariante $\mu_{\theta_0} = N\left(0, \frac{1}{2\theta_0}\right)$. En outre, pour $M > 0$ et $C = \theta_0 M$, (H 1.3) est vérifiée. Enfin, on a :
$A_{\theta_0}^l f_{\theta_0}(x) = (-\theta_0)^{l+1} x$. On vérifie alors facilement (H 1), (H 3) et (H 4).

$$\begin{aligned}
M(v) &= \frac{\exp(-\theta_0 v)}{2\theta_0},\ P(v) = -Q(v) = \frac{1}{2\theta_0} \\
\breve{N}(v) &= -\frac{\theta_0}{2}\exp(-\theta_0 v),\ N(v) = \frac{\theta_0^2}{2}\exp(-\theta_0 v),\ \widetilde{N}(v) = \frac{\theta_0^4}{2}\exp(-\theta_0 v)
\end{aligned}$$

Notons que $V(\theta_0)$ est la variance asymptotique de $\sqrt{T}\left(\widehat{\theta}_n - \theta_\delta\right)$.
Pour le schéma d'Euler (cf. annexe D), on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_n^e &= -\frac{1}{\delta}\frac{\sum_{k=1}^n Y_{(k-1)\delta}\left(Y_{k\delta} - Y_{(k-1)\delta}\right)}{\sum_{k=0}^{n-1}\left(Y_{k\delta}\right)^2} \\
\theta_\delta^e &= -\frac{1}{\delta}\left(\exp(-\theta_0\delta) - 1\right) = \theta_0 - \frac{\theta_0^2}{2}\delta + o(\delta) \\
V^e(\theta_0) &= 2\theta_0\left(1 + o(1)\right)
\end{aligned}$$

Pour le schéma du trapèze, on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_n^t &= -\frac{2}{\delta}\frac{\sum_{k=1}^n Y_{(k-1)\delta}\left(Y_{k\delta} - Y_{(k-1)\delta}\right)}{\sum_{k=1}^n Y_{(k-1)\delta}\left(Y_{k\delta} + Y_{(k-1)\delta}\right)} \\
\theta_\delta^t &= -\frac{2}{\delta}\left(\frac{\exp(-\theta_0\delta) - 1}{1 + \exp(-\theta_0\delta)}\right) = \theta_0 - \frac{\theta_0^3}{12}\delta^2 + o\left(\delta^2\right) \\
V^t(\theta_0) &= 2\theta_0\left(1 + o(\delta)\right)
\end{aligned}$$

Pour le schéma de Simpson :

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_n^s &= -\frac{3}{\delta}\frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} Y_{2(k-1)\delta}\left(Y_{2k\delta}-Y_{2(k-1)\delta}\right)}{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} Y_{2(k-1)\delta}\left(Y_{2(k-1)\delta}+4Y_{2k\delta-1}+Y_{2k\delta}\right)} \\
\theta_\delta^s &= -\frac{3}{\delta}\left(\frac{\exp(-2\delta\theta_0)-1}{\exp(-2\delta\theta_0)+4\exp(-\delta\theta_0)+1}\right)=\theta_0-\frac{\theta_0^5}{180}\delta^4+o\left(\delta^4\right) \\
V^s(\theta_0) &= 2\theta_0(1+o(\delta))
\end{aligned}$$

Pour le schéma de Bode :

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_n^b &= -\frac{45}{\delta}\frac{\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} Y_{4(k-1)\delta}\left(Y_{4k\delta}-Y_{4(k-1)\delta}\right)}{\sum_{k=0}^{\frac{n}{4}} Y_{4(k-1)\delta}\left(14Y_{4(k-1)\delta}+64Y_{(4k-3)\delta}+24Y_{(4k-2)\delta}+64Y_{(4k-1)\delta}+14Y_{4k\delta}\right)} \\
\theta_\delta^b &= -\frac{45}{\delta}\left(\frac{\exp(-4\theta_0\delta)-1}{14+64\exp(-\theta_0\delta)+24\exp(-2\theta_0\delta)+64\exp(-3\theta_0\delta)+14\exp(-4\theta_0\delta)}\right) \\
&= \theta_0-\frac{2\theta_0^7}{945}\delta^6+o\left(\delta^6\right)
\end{aligned}$$

On prend comme valeur initiale $Y_0 = 1$, comme vraie valeur du paramètre $\theta_0 = 1$ et $T = 200$. Pour ce modèle, nous testerons également nos résultats pour $n = 400$ et $\delta = 0.05$ ($T = 20$).

On peut remarquer que les estimateurs associés aux schémas anticipatifs améliorent les résultats obtenuş avec l'estimateur associé au schéma d'Euler, pour $T = 200$. Il faut souligner la relative stabilité de l'estimation $m\left(\widehat{\theta}_n\right)$, bien qu'elle doive théoriquement variée en fonction du schéma anticipatif associé et de la décomposition de $T = n\delta$ choisis : en effet, pour un choix de (n, δ) fixé, on devrait avoir $\left|\widehat{\theta}_n^t-\theta_0\right| > \left|\widehat{\theta}_n^s-\theta_0\right| > \left|\widehat{\theta}_n^b-\theta_0\right|$ et, pour chacun de ces trois schémas, l'estimation $m\left(\widehat{\theta}_n\right)$ devrait être d'autant plus proche de θ_0 que δ est petit.
Par contre, on constate bien que la variance empirique est d'autant plus proche du développement théorique de la variance asymptotique $\frac{V(\theta_0)}{T}$ que δ est petit.

5.2 Processus de Cox-Ingersoll-Ross

On considère l'e.d.s. suivante:

$$dY_t = b_0 - a_0 Y_t dt + \sqrt{Y_t}dW_t,\ Y_0 = x$$

On a donc :

$$\theta = (b, a),\ \sigma(x) = \sqrt{x},\ f =^t (f_1, f_2), f_1(x) = -x \text{ et } f_2(x) = 1$$

f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et lipschitzienne, σ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et hölderienne de rapport $\frac{1}{2}$. L'e.d.s. admet donc une solution forte unique, à trajectoires continues. Si $b \geq \frac{1}{2}$ et $a > 0$, la diffusion est récurrente positive sur $\mathbb{R}_+^*$, de loi invariante $\mu_\theta = \Gamma(2b, 2a)$. Cette loi admet des moments de tous ordres.

	δ	n	$\widehat{\theta}_n^e$ $(\theta_0 = 1)$: $m\left(\widehat{\theta}_n^e\right)$	$S^2\left(\widehat{\theta}_n^e\right)$	θ_δ^e	$\frac{H_{\theta_0}^{-1}}{T}$
$T = 200$	0.05	4000	0.98066	0.008347	0.975412	0.01
	0.1	2000	0.958176	0.010976	0.951626	
	0.5	400	0.798656	0.006804	0.786939	
$T = 20$	0.05	400	1.179932	0.140912	0.975412	0.01

Table 1: Processus de O.U. et schéma d' Euler : moyenne et variance empiriques pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.C.

	δ	n	$\widehat{\theta}_n^t$ $(\theta_0 = 1)$: $m\left(\widehat{\theta}_n^t\right)$	$S^2\left(\widehat{\theta}_n^t\right)$	θ_δ^t	$\frac{H_{\theta_0}^{-1}}{T}$
$T = 200$	0.05	4000	1.005748	0.00922	0.999792	0.01
	0.1	2000	1.007027	0.013411	0.999167	
	0.5	400	1.001241	0.016849	0.979675	
$T = 20$	0.05	400	1.21973	0.165862	0.999792	0.1

Table 2: Processus de O.U. et schéma du trapèze : moyenne et variance empiriques pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.G.

	δ	n	$\widehat{\theta}_n^s$ $(\theta_0 = 1)$: $m\left(\widehat{\theta}_n^s\right)$	$S^2\left(\widehat{\theta}_n^s\right)$	θ_δ^s	$\frac{H_{\theta_0}^{-1}}{T}$
$T = 200$	0.05	4000	1.006411	0.010401	1	0.01
	0.1	2000	1.011733	0.014426	0.99999	
	0.5	400	1.008889	0.026870	0.999663	
$T = 20$	0.05	400	1.206787	0.192757	1	0.1

Table 3: Processus de O.U. et schéma de Simpson : moyenne et variance empiriques pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.G.

	δ	n	$\widehat{\theta}_n^b$ $(\theta_0 = 1)$: $m\left(\widehat{\theta}_n^b\right)$	$S^2\left(\widehat{\theta}_n^b\right)$	θ_δ^b
$T = 200$	0.05	4000	1.008880	0.012233	1
	0.1	2000	1.004399	0.016375	1
	0.5	400	1.045534	0.071595	0.999971
$T = 20$	0.05	400	1.191435	0.195313	1

Table 4: Processus de O.U. et schéma de Bode : moyenne et variance empiriques pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.G.

De plus, si $b > 2$, $\int \frac{1}{\sigma^8(x)} d\mu_{\theta_0}(x) < \infty$ et donc (H 1.4) est vérifiée. (H 1.3) est vérifiée pour $M > \max\{1, \frac{4b_0-1}{4a}\}$ et $C = \frac{1}{4} + a_0 M - b_0$. Enfin, on a pour tout $l \geq 0$, $A_\theta^l f_\theta(x) = (-a)^l f_\theta(x)$. On vérifie alors facilement les hypothèses de (H 1) (ainsi que (H 3) et (H 4)), et on montre que:

$$\begin{aligned}
M_{1,1}(v) &= \frac{b_0}{a_0},\ M_{1,2}(v) = -1,\ M_{2,1}(v) = \frac{\exp(-a_0 v) - 2b_0}{2b_0 - 1},\ M_{2,2}(v) = \frac{2a_0}{2b_0 - 1} \\
N_1(v) &= 0,\ N_2(v) = \frac{a_0^3}{2b_0 - 1} \exp(-a_0 v) \\
P_{1,1}(v) &= \frac{b_0}{a_0},\ P_{1,2}(v) = P_{2,1}(v) = \frac{\exp(-a_0 v) - 2b_0}{2b_0 - 1},\ P_{2,2}(v) = 2\frac{a_0 b_0 (b_0 - \exp(-a_0 v))}{(2b_0 - 1)(b_0 - 1)} \\
Q_{i,j}(v) &= -a_0 P_{i,j}(v)
\end{aligned}$$

Pour le schéma d'Euler, on a :

$$\begin{aligned}
a_\delta^e &= -\frac{1}{\delta}(\exp(-a_0\delta) - 1) = a_0 - \frac{a_0^2}{2}\delta + o(\delta) \\
b_\delta^e &= \frac{b_0}{a_0} a_\delta = b_0 - \frac{b_0 a_0}{2}\delta + o(\delta)
\end{aligned}$$

Pour le schéma du trapèze :

$$a_\delta^t = -\frac{\delta}{2}\frac{\exp(-a_0\delta) - 1}{\exp(-a_0) + 1} = a_0 - \frac{a_0^3}{12}\delta^2 + o\left(\delta^2\right), \quad b_\delta^t = \frac{b_0}{a_0} a_\delta^t = b_0 - \frac{b_0 a_0^2}{12}\delta^2 + o\left(\delta^2\right)$$

Pour le schéma de Simpson :

$$\begin{aligned}
a_\delta^s &= -\frac{3}{\delta}\left(\frac{\exp(-2\delta a_0) - 1}{\exp(-2\delta a_0) + 4\exp(-\delta a_0) + 1}\right) = a_0 - \frac{a_0^5}{180}\delta^4 + o\left(\delta^4\right) \\
b_\delta^s &= \frac{b_0}{a_0} a_\delta = b_0 - \frac{b_0 a_0^4}{180}\delta^4 + o\left(\delta^4\right)
\end{aligned}$$

Enfin, pour le schéma de Bode, on a :

$$\begin{aligned}
a_\delta^b &= -\frac{45}{\delta}\left(\frac{\exp(-4a_0\delta) - 1}{14 + 64\exp(-a_0\delta) + 24\exp(-2a_0\delta) + 64\exp(-3a_0\delta) + 14\exp(-4a_0\delta)}\right) \\
&= a_0 - \frac{2a_0^7}{945}\delta^6 + o\left(\delta^6\right) \\
b_\delta^b &= \frac{b_0}{a_0} a_\delta = b_0 - \frac{2b_0 a_0^6}{945}\delta^6 + o\left(\delta^6\right)
\end{aligned}$$

Bien qu'il soit possible de calculer (comme pour le modèle précedent) le développement en δ à l'ordre 1 des différentes variances asymptotiques, nous nous contenterons de leur approximation commune :

$$H_{\theta_0}^{-1} = (2b_0 - 1)\begin{pmatrix} \frac{2a_0}{2b_0-1} & 1 \\ 1 & \frac{b_0}{a_0} \end{pmatrix}.$$

On prend $Y_0 = 1$, $(a_0, b_0) = (1, 3)$ et $T = 200$.
Les conclusions que l'on peut tirer sont à peu près similaires aux observations faites pour le processus O.U. Cependant, l'amélioration des résultats obtenus pour les schémas anticipatifs par rapport à ceux du schéma d'Euler est moins nette.

5.3 Cas d'une dérive non linéaire en x

Soit l'e.d.s.

$$dY_t = \left(-\theta_0 \ln(Y_t) Y_t \frac{1}{2} Y_t\right) dt + Y_t dW_t, \ Y_0 = x$$

L'e.d.s. admet une unique solution forte à trajectoires continues

$$Y_t = \exp\left(\exp(-\theta_0 t) \ln(x) + \exp(-\theta_0 t) \int_0^t \exp(\theta_0 s) \, dW_s\right)$$

$\pi_{\theta_0}^t(x, .)$ est donc une loi log-normale de paramètre $\left(\ln(x) \exp(-\theta_0 t), \frac{1-\exp(-2\theta_0 t)}{2\theta_0}\right)$. Si $\theta_0 > 0$, la diffusion est récurrente positive de loi invariante μ_{θ_0} log-normale de paramètres $\left(0, \frac{1}{2\theta_0}\right)$. On vérifie (H 2.4), ainsi que (H 2.3) pour $M > 1$ et $C = \theta_0 \ln(M) + \frac{1}{2}$.
On montre que :

$$\begin{aligned}
M(v) &= \left(\frac{\exp(-\theta_0 v)}{2\theta_0} - \alpha^2(v)\right) \exp(\alpha(v)) \\
P(v) &= \left(\frac{1}{2\theta_0} + 4\alpha^2(v)\right) \exp(4\alpha(v)) \\
\alpha(v) &= \frac{1 - \exp(-\theta_0 v)}{2\theta_0}, \ R(v) = \alpha(v) \exp(\alpha(v))
\end{aligned}$$

Les estimateurs associés aux quatre schémas d'approximations vont converger respectivement vers :

$$\begin{aligned}
\theta_\delta^e &= \frac{1}{\delta} \frac{R(\delta)}{M(0)} = \theta_0 + \frac{1}{2}\left(\theta_0 - \theta_0^2\right) \delta + o(\delta) \\
\theta_\delta^t &= \frac{2}{\delta}\left(1 - \frac{\delta}{4}\right) \frac{R(\delta)}{M(0) + M(\delta)} = \theta_0 + \left(-\frac{\theta_0^3}{12} + \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_0}{16}\right) \delta^2 + o\left(\delta^2\right) \\
\theta_\delta^s &= \frac{\left(\frac{3}{\delta} - \frac{1}{2}\right) R(2\delta) - 2R(\delta)}{M(0) + 4M(\delta) + M(2\delta)} = \theta_0 + \frac{1}{12}\left(-\frac{\theta_0^5}{15} + \theta_0^4 - \frac{65\theta_0^3}{4} + \frac{13\theta_0^2}{3} - \frac{\theta_0}{48}\right) \delta^4 + o\left(\delta^4\right) \\
\theta_\delta^b &= \frac{\left(\frac{45}{\delta} - 7\right) R(4\delta) - 32R(3\delta) - 12R(2\delta) - 32R(\delta)}{14M(0) + 64M(\delta) + 24M(\delta^2) + 64M(\delta^3) + 14M(\delta^4)} \\
&= \theta_0 + \frac{\theta_0}{30240}\left(-7 + 252\theta_0 - 2800\theta_0^2 + 11200\theta_0^3 - 14448\theta_0^4 + 4032\theta_0^5 - 64\theta_0^6\right) \delta^6 + o\left(\delta^6\right)
\end{aligned}$$

Les données sont simulées sur $[0, 200]$. Les moyennes et variances empiriques sont calculées sur 1000 réalisations. On prend comme valeur initiale du processus $Y_0 = 1$ et comme vraie valeur du paramètre $\theta_0 = 1$.

		a_n^e $(a_0 = 1)$				b_n^e $(b_0 = 3)$			
δ	n	$m\,(a_n^e)$	$S^2\,(a_n^e)$	a_δ^e	$\frac{H_{\theta_0}^{-1}}{T}$	$m\,(b_n^e)$	$S^2\,(b_n^e)$	b_δ^e	$\frac{H_{\theta_0}^{-1}}{T}$
0.05	4000	1.0408	0.0104	0.975412		3.1064	0.080	2.926235	
0.1	2000	1.011	0.0102	0.951626	0.01	3.005814	0.0739	2.854877	0.075
0.5	400	0.843	0.00845	0.7869		2.505	0.0697	2.3608	

Table 5: Processus de C.I.R. et schéma d'Euler : moyenne et variance empirique pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.C.

		a_n^t $(a_0 = 1)$				b_n^t $(b_0 = 3)$			
δ	n	$m\,(a_n^t)$	$S^2\,(a_n^t)$	a_δ^t	$\frac{H_{\theta_0}^{-1}}{T}$	$m\,(b_n^t)$	$S^2\,(b_n^t)$	b_δ^t	$\frac{H_{\theta_0}^{-1}}{T}$
0.05	4000	1.026	0.0103	0.999792		3.082	0.078	2.999375	
0.1	2000	1.0214	0.0115	0.999167	0.01	3.0567	0.083	2.997502	0.075
0.5	400	1.008	0.0186	0.9796		3.018	0.1516	2.939	

Table 6: Processus de C.I.R. et schéma du trapèze : moyenne et variance empirique pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.G.

		a_n^s $(a_0 = 1)$				b_n^s $(b_0 = 3)$			
δ	n	$m\,(a_n^s)$	$S^2\,(a_n^s)$	a_δ^s	$\frac{H_{\theta_0}^{-1}}{T}$	$m\,(b_n^s)$	$S^2\,(b_n^s)$	b_δ^s	$\frac{H_{\theta_0}^{-1}}{T}$
0.05	4000	1.0258	0.011	1		3.081	0.0849	3	
0.1	2000	1.0219	0.0134	0.9999	0.01	3.0583	0.0998	2.9999	0.075
0.5	400	1.048	0.0357	0.999		3.139	0.298	2.998	

Table 7: Processus de C.I.R. et schéma de Simpson : moyenne et variance empirique pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.G.

		a_n^b $(a_0 = 1)$				b_n^b $(b_0 = 3)$			
δ	n	$m\left(a_n^b\right)$	$S^2\left(a_n^b\right)$	a_δ^b	$\frac{H_{\theta_0}^{-1}}{T}$	$m\left(b_n^b\right)$	$S^2\left(b_n^b\right)$	b_δ^b	$\frac{H_{\theta_0}^{-1}}{T}$
0.05	4000	1.026	0.0127	1		3.0843	0.0997	3	
0.1	2000	1.0253	0.01625	1	0.01	3.0686	0.126	3	0.075
0.5	400	1.095	0.116	0.999971		3.28	1.0039	2.999913	

Table 8: Processus de C.I.R. et schéma de Bode : moyenne et variance empirique pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.G.

L'écart, croissant en fonction de δ, constaté entre la variance empirique et la variance asymptotique, est particulièrement visible pour le schéma de Bode dans le cas où $\delta = 0.5$.

En conclusion, la méthode des moments généralisés associée aux schémas anticipatifs (du trapèze et de Simpson) donne une meilleure estimation du paramètre de dérive que la méthode des moindres carrés associé au schéma d'Euler.

		$\widehat{\theta}^e_n$ $(\theta_0 = 1)$			
δ	n	$m\left(\widehat{\theta}^e_n\right)$	$S^2\left(\widehat{\theta}^e_n\right)$	θ^e_δ	$\frac{H^{-1}_{\theta_0}}{T}$
0.05	4000	1.005448	0.010269	0.99949	0.01
0.1	2000	1.01983	0.009703	0.998	
0.5	400	0.972443	0.019	0.95036	

Table 9: Diffusion log-Normale (L.N.) et schéma d'Euler : moyenne et variance empirique pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.C.

		$\widehat{\theta}^t_n$ $(\theta_0 = 1)$			
δ	n	$m\left(\widehat{\theta}^t_n\right)$	$S^2\left(\widehat{\theta}^t_n\right)$	θ^t_δ	$\frac{H^{-1}_{\theta_0}}{T}$
0.05	4000	1.006164	0.010815	1.000253	0.01
0.1	2000	1.016417	0.010863	1.000986	
0.5	400	1.040103	0.0359	1.019705	

Table 10: Diffusion L.N. et schéma du trapèze : moyenne et variance empirique pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.G.

		$\widehat{\theta}^s_n$ $(\theta_0 = 1)$			
δ	n	$m\left(\widehat{\theta}^s_n\right)$	$S^2\left(\widehat{\theta}^s_n\right)$	θ^s_δ	$\frac{H^{-1}_{\theta_0}}{T}$
0.05	4000	1.007902	0.011917	1	0.01
0.1	2000	1.014506	0.012125	1	
0.5	400	1.030136	0.083105	1.000977	

Table 11: Diffusion L.N. et schéma de Simpson : moyenne et variance empirique pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.G.

		$\widehat{\theta}^b_n$ $(\theta_0 = 1)$			
δ	n	$m\left(\widehat{\theta}^b_n\right)$	$S^2\left(\widehat{\theta}^b_n\right)$	θ^t_δ	$\frac{H^{-1}_{\theta_0}}{T}$
0.05	4000	1.008508	0.014041	1	0.01
0.1	2000	1.0200	0.0187	1	
0.5	400	0.995117	3.189	0.999881	

Table 12: Diffusion L.N. et schéma de Bode : moyenne et variance empirique pour 1000 réalisations de l'estimateur E.M.G.

Remerciements à Xavier Guyon pour son encadrement et ses conseils précieux.

References

[1] Bergstrom, (1976) *Statistical inference in Continuous Time Economic Models.*- Bergstrom, North Holland.

[2] Bibby, B.M. & Sorensen, M. (1995) *Martingale Estimation Functions for Discretely Observed Diffusion Processes.* - Bernoulli 1, 17-39.

[3] Dacunha-Castelle, D. & Duflo, M. (1993) *Probabilité et Statistiques. Tome 2*- 2^{eme} Ed. Masson.

[4] Dacunha-Castelle, D. & Florens-Zmirou, D. (1986) *Estimation of the coefficient of a diffusion from discrete observations.*- Stochastics 19, 263-284.

[5] Florens-Zmirou, D. (1989) *Approximate discrete schemes for stastics of diffusion processes.*- Statistics 20, 547-557.

[6] Genon-Catalot, V. (1990) *Maximum contrast estimation for diffusion processes from discrete observations.*- Statistics 21, 99-116.

[7] Gourieroux, C. & Monfort, A. *Statistique et Modèles Econométriques. Tome 1*- Economica.

[8] Hansen, L (1982) *Large Sample Properies of Generalized Method of Moments Estimators.*- Econometrica, 50 (4), 1029-1054.

[9] Hansen, L & Singleton, K (1982) *Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models.*- Econometrica, 50 (5), 1269-1286.

[10] Karatzas, I. & Shreve S.E. (1996) *Brownian Motion and Stochastic Calculus.*- 2^{nd} Ed. Springer.

[11] Kessler, M. (1995) *Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations.*- Prépublication 306. Laboratoire de Probabilité de l'Université Paris 6.

[12] Kessler, M. (1996) *Simple and Explicit Estimating Functions for a Discretely Observed Diffusion Process.*- Research Reports 336, Department of theoretical statistics, University of Aarhus.

[13] Kessler, M. & Sorensen, M. (1995) *Estimating Equations Based on Eigenfunctions for a Discretely Observed Diffusion Process.*- Research Reports 332, Department of theoretical statistics, University of Aarhus.

[14] Lipster, R.S. & Shiryaev, A.N. (1977) *Statistics of random processes. Tome 1,2*- Springer-Verlag.

[15] Press, W.H., Teukolskey, S.A., Vetterling, W.T. & Flannery, B.P. *Numerical Recipes in C*- 2^{nd} Ed. Cambridge University Press.

[16] Pedersen, A. R. (1995) *Consistency and asymptotic normality of an approximate maximum likelihood estimator for dicretely observed diffusion processes.*- Bernoulli 1, 257-279.

[17] Pedersen, A. R. (1995) *A new approch to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations.*- Scand. J. Statist. 22, 55-71.

[18] Sargan, J.D. (1976) *Some discrete approximations to continuous times stochastics models*- In Bergstrom *Statistical inference in Continuous Time Economic Models.*, North Holand, 27-80.

[19] Sorensen, M. (1996) *Estimating functions for discretely observed diffusions: A review.*- Research Reports 348, Department of theoretical statistics, University of Aarhus.

[20] Yoshida, N. (1992) *Estimation for diffusion processes from discrete observations.*- J. Multivariate Anal. 41, 220-242.

A Démonstration de la propriété 2 : schéma d'approximation de Simpson

Cette démonstration, tout comme celle du schéma du trapèze, repose sur un résultat d'interversion de l'ordre d'intégration des intégrales de Riemann et des intégrales stochastique. Pour une martingale locale continue $\left(\int_0^t J_v dW_v\right)_{t\geq 0}$ et une fonction g continue sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_t^{t+\delta}\left(\int_v^t g(u)du\right) J_v dW_v = \int_t^{t+\delta}\left(\int_t^u J_v dW_v\right) g(u)du \tag{13}$$

$$\int_t^{t+\delta}\left(\int_t^v g(u)du\right) J_v dW_v = \int_t^{t+\delta}\left(\int_u^{t+\delta} J_v dW_v\right) g(u)du \tag{14}$$

- Posons:

$$\begin{aligned} A_t &= \int_t^{t+\delta} f(Y_v)\,dv - \frac{\delta}{3}\left[f(Y_t) + 2f(Y_{t+\delta})\right] + \int_{t+\delta}^{t+2\delta} f(Y_v)\,dv - \frac{\delta}{3}\left[f(Y_{t+2\delta}) + 2f(Y_{t+\delta})\right] \\ &= A_t^1 + A_t^2 \end{aligned}$$

$$A_t^1 = \frac{1}{3}\int_t^{t+\delta}\left[f(Y_v) - f(Y_t)\right]dv - \frac{2}{3}\int_t^{t+\delta}\left[f(Y_{t+\delta}) - f(Y_v)\right]dv$$

Par application de la formule de Ito, on obtient:

$$\begin{aligned} A_t^1 &= \frac{1}{3}\int_t^{t+\delta}\left[\int_t^v Af(Y_u)\,du\right]dv + \frac{1}{3}\int_t^{t+\delta}\left[\int_t^v f'(Y_u)\,dW_u\right]dv \\ &- \frac{2}{3}\int_t^{t+\delta}\left[\int_v^{t+\delta} Af(Y_u)\,du\right]dv - \frac{2}{3}\int_t^{t+\delta}\left[\int_v^{t+\delta} f'(Y_u)\,dW_u\right]dv \end{aligned}$$

(13) et (14) impliquent que :

$$\begin{aligned} A_t^1 &= \frac{1}{3}\int_t^{t+\delta}(t+\delta-u)\,Af(Y_u)\,du + \frac{1}{3}\int_t^{t+\delta}(t+\delta-u)\,f'(Y_u)\,dW_u \\ &- \frac{2}{3}\int_t^{t+\delta}(u-t)\,Af(Y_u)\,du - \frac{2}{3}\int_t^{t+\delta}(u-t)\,f'(Y_u)\,dW_u \\ &= \int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{3}-u\right)Af(Y_u)\,du + \int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{3}-u\right)f'(Y_u)\,dW_u \end{aligned}$$

En procédant de même que pour A_t^1, on montre que :

$$\begin{aligned} A_t^2 &= \frac{2}{3}\int_{t+\delta}^{t+2\delta}\left[f(Y_v) - f(Y_{t+\delta})\right]dv - \frac{1}{3}\int_{t+\delta}^{t+2\delta}\left[f(Y_{t+2\delta}) - f(Y_v)\right]dv \\ &= \int_{t+\delta}^{t+2\delta}\left(t+\frac{5\delta}{3}-u\right)Af(Y_u)\,du + \int_{t+\delta}^{t+2\delta}\left(t+\frac{5\delta}{3}-u\right)f'(Y_u)\,dW_u \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
A_t &= \int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{3}-u\right)Af\left(Y_u\right)du+\int_{t+\delta}^{t+2\delta}\left(t+\frac{5\delta}{3}-u\right)Af\left(Y_u\right)du \\
&+ \int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{3}-u\right)f'\left(Y_u\right)dW_u+\int_{t+\delta}^{t+2\delta}\left(t+\frac{5\delta}{3}-u\right)f'\left(Y_u\right)dW_u
\end{aligned}$$

Or,

$$\int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{3}-u\right)du=-\frac{\delta^2}{6},\qquad \int_{t+\delta}^{t+2\delta}\left(t+\frac{5\delta}{3}-u\right)du=\frac{\delta^2}{6}$$

Donc, si on note

$$B_t = \int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{3}-u\right)Af\left(Y_u\right)du+\int_{t+\delta}^{t+2\delta}\left(t+\frac{5\delta}{3}-u\right)Af\left(Y_u\right)du$$

on a:

$$\begin{aligned}
B_t &= \int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{3}-u\right)\left[Af\left(Y_u\right)-A\left(Y_{t+\delta}\right)\right]du \\
&+ \int_{t+\delta}^{t+2\delta}\left(t+\frac{5\delta}{3}-u\right)\left[Af\left(Y_u\right)-Af\left(Y_{t+\delta}\right)\right]du \\
&= B_t^1+B_t^2
\end{aligned}$$

- (1) et (2) entrainent que:

$$\begin{aligned}
B_t^1 &= -\int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{3}-u\right)\left[\int_u^{t+\delta}A^2f\left(Y_v\right)dv\right]du \\
&- \int_t^{t+\delta}\left(t+\frac{\delta}{3}-u\right)\left[\int_u^{t+\delta}(Af)'\left(Y_v\right)dW_v\right]du \\
&= -\int_t^{t+\delta}\left[\int_t^{v}\left(t+\frac{\delta}{3}-u\right)du\right]A^2f\left(Y_v\right)dv \\
&- \int_t^{t+\delta}\left[\int_t^{v}\left(t+\frac{\delta}{3}-u\right)du\right](Af)'\left(Y_v\right)dW_v \\
&= \int_t^{t+\delta}\frac{1}{2}(v-t)\left(v-t-\frac{2\delta}{3}\right)A^2f\left(Y_v\right)dv \\
&+ \int_t^{t+\delta}\frac{1}{2}(v-t)\left(v-t-\frac{2\delta}{3}\right)(Af)'\left(Y_v\right)dW_v
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
B_t^2 &= \int_{t+\delta}^{t+2\delta}\frac{1}{2}(t+2\delta-v)\left(t+\frac{4\delta}{3}-v\right)A^2f\left(Y_v\right)dv \\
&+ \int_{t+\delta}^{t+2\delta}\frac{1}{2}(t+2\delta-v)\left(t+\frac{4\delta}{3}-v\right)(Af)'\left(Y_v\right)dW_v
\end{aligned}$$

Or,

$$\int_t^{t+\delta} \frac{1}{2}(v-t)\left(v-t-\frac{2\delta}{3}\right) dv = 0, \qquad \int_{t+\delta}^{t+2\delta} \frac{1}{2}(t+2\delta-v)\left(t+\frac{4\delta}{3}-v\right) dv = 0$$

Donc si on note :

$$\begin{aligned} C_t &= \int_t^{t+\delta} \frac{1}{2}(v-t)\left(v-t-\frac{2\delta}{3}\right) A^2 f(Y_v)\, dv \\ &+ \int_{t+\delta}^{t+2\delta} \frac{1}{2}(t+2\delta-v)\left(t+\frac{4\delta}{3}-v\right) A^2 f(Y_v)\, dv \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} C_t &= \int_t^{t+\delta} \frac{1}{2}(v-t)\left(v-t-\frac{2\delta}{3}\right) \left[A^2 f(Y_v) - A^2 f(Y_{t+\delta})\right] dv \\ &+ \int_{t+\delta}^{t+2\delta} \frac{1}{2}(t+2\delta-v)\left(t+\frac{4\delta}{3}-v\right) \left[A^2 f(Y_v) - A^2 f(Y_{t+\delta})\right] dv \\ &= C_t^1 + C_t^2 \end{aligned}$$

- Par (13) et (14), on obtient :

$$\begin{aligned} C_t^1 &= -\frac{1}{2}\int_t^{t+\delta} (u-t)\left(u-t-\frac{2\delta}{3}\right)\left[\int_u^{t+\delta} A^3 f(Y_v)\, dv\right] du \\ &- \frac{1}{2}\int_t^{t+\delta} (u-t)\left(u-t-\frac{2\delta}{3}\right)\left[\int_u^{t+\delta} \left(A^2 f\right)'(Y_v)\, dW_v\right] du \\ &= -\frac{1}{2}\int_t^{t+\delta} \left[\int_t^v (u-t)\left(u-t-\frac{2\delta}{3}\right) du\right] A^3 f(Y_v)\, dv \\ &- \frac{1}{2}\int_t^{t+\delta} \left[\int_t^v (u-t)\left(u-t-\frac{2\delta}{3}\right) du\right] \left(A^2 f\right)'(Y_v)\, dW_v \\ &= \frac{1}{6}\int_t^{t+\delta} (v-t)^2 (t+\delta-v) A^3 f(Y_v)\, dv \\ &+ \frac{1}{6}\int_t^{t+\delta} (v-t)^2 (t+\delta-v) \left(A^2 f\right)'(Y_v)\, dW_v \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} C_t^2 &= \frac{1}{6}\int_{t+\delta}^{t+2\delta} (v-t-2\delta)^2 (t+\delta-v) A^3 f(Y_v)\, dv \\ &+ \frac{1}{6}\int_{t+\delta}^{t+2\delta} (v-t-2\delta)^2 (t+\delta-v) \left(A^2 f\right)'(Y_v)\, dW_v \end{aligned}$$

Or,

$$\int_t^{t+\delta} (v-t)^2 (t+\delta-v)\, dv = -\frac{\delta^4}{12}, \quad \int_{t+\delta}^{t+2\delta} (v-t-2\delta)^2 (t+\delta-v)\, dv = \frac{\delta^4}{12}$$

Donc, si on pose :

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{1}{6}\int_t^{t+\delta}(v-t)^2(t+\delta-v)\,A^3f(Y_v)\,dv \\ &+ \frac{1}{6}\int_{t+\delta}^{t+2\delta}(v-t-2\delta)^2(t+\delta-v)\,A^3f(Y_v)\,dv \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{1}{6}\int_t^{t+\delta}(v-t)^2(t+\delta-v)\left[A^3f(Y_v)-A^3f(Y_{t+\delta})\right]dv \\ &+ \frac{1}{6}\int_{t+\delta}^{t+2\delta}(v-t-2\delta)^2(t+\delta-v)\left[A^3f(Y_v)-A^3f(Y_{t+\delta})\right]dv \\ &= D_t^1+D_t^2 \end{aligned}$$

- D'après (13) et (14)

$$\begin{aligned} D_t^1 &= \frac{1}{6}\int_t^{t+\delta}(u-t)^2(t+\delta-u)\left[\int_u^{t+\delta}A^4f(Y_v)\,dv\right]du \\ &- \frac{1}{6}\int_t^{t+\delta}(u-t)^2(t+\delta-u)\left[\int_u^{t+\delta}\left(A^3f\right)'(Y_v)\,dW_v\right]du \\ &= -\int_t^{t+\delta}\left[\int_t^v\frac{1}{6}(u-t)^2(t+\delta-u)\,du\right]A^4f(Y_v)\,dv \\ &- \int_t^{t+\delta}\left[\int_t^v\frac{1}{6}(u-t)^2(t+\delta-u)\,du\right]\left(A^3f\right)'(Y_v)\,dW_v \\ &= \frac{1}{24}\int_t^{t+\delta}(v-t)^3\left(v-t-\frac{4\delta}{3}\right)A^4f(Y_v)\,dv \\ &+ \frac{1}{24}\int_t^{t+\delta}(v-t)^3\left(v-t-\frac{4\delta}{3}\right)\left(A^3f\right)'(Y_v)\,dW_v \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} D_t^2 &= \frac{1}{24}\int_{t+\delta}^{t+2\delta}(t+2\delta-v)^3\left(t+\frac{2\delta}{3}-v\right)A^4f(Y_v)\,dv \\ &+ \frac{1}{24}\int_{t+\delta}^{t+2\delta}(t+2\delta-v)^3\left(t+\frac{2\delta}{3}-v\right)\left(A^3f\right)'(Y_v)\,dW_v \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\delta}(v-t)^3\left(v-t-\frac{4\delta}{3}\right)dv &= \int_{t+\delta}^{t+2\delta}(v-t-2\delta)^3\left(t+\frac{2\delta}{3}-v\right)dv \\ &= -\frac{2\delta^5}{15} \end{aligned}$$

Le développement s'arrête donc à la quatrième itération.
Si l'on rassemble l'ensemble des résultats obtenus, on a :

$$A_t+\int_t^{t+2\delta}\sigma(Y_v)\,dW_v=\eta_t+\tilde{W}_t$$

où η_t et $\tilde{W}_t$ sont les variables définies dans la propriété 2.

B Démonstration du lemme 3 : régularité $\theta \to V_\delta^i(\theta)$ et développement en δ de ces dérivées partielles

1. Montrons que $\theta \to V_\delta^i(\theta) = E_{\theta_0}[\mathcal{V}_\delta^i(Y_\delta, Y_0, \theta)]$ est de classe C^3 sur Θ, ses dérivées partielles étant obtenues par dérivation sous l'espérance.
(H 2.5) implique que pour tout $i = 1, p$ et tout couple (y, x), $\theta \to \mathcal{V}_\delta^i(y, x, \theta)$ est de classe C^3 sur Θ et qu'il existe $r > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\begin{aligned} \forall j,\ \forall\,\theta \in \Theta, \qquad & \left|\frac{\partial}{\partial\theta^j}\mathcal{V}_\delta^i(y, x, \theta)\right| \leq g(y, x) \\ \text{avec} \quad g(y, x) = {} & C\frac{(1+|x|)^r\left((1+|y|)^r + (1+|x|)^r\right)}{\sigma^2(x)} \end{aligned}$$

Il en est de même pour ces dérivées partielles à l'ordre 2 et 3. De plus, d'aprés (H 2.4), $Q_{\theta_0}^\delta(g^2) < \infty$. Par application du théorème de Lebesgue, on montre que $\theta \to V_\delta^i(\theta)$ est trois fois continument différentiable sur Θ, par dérivation sous le signe somme.

2. Il nous reste à développer $\frac{\partial}{\partial\theta^j}V_\delta^i(\theta)$ en fonction de δ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta^j}V_\delta^i(\theta) &= E_{\theta_0}\left[\frac{\partial}{\partial\theta^j}\mathcal{V}_\delta^i(Y_\delta, Y_0, \theta)\right] \\ &= \frac{\delta}{2}E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^j\partial\theta^i}f_\theta(Y_0)\right)\left(\frac{f_{\theta_0}(Y_0) - f_\theta(Y_0)}{\sigma^2(Y_0)}\right)\right] \\ &+ \frac{\delta}{2}E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^j\partial\theta^i}f_\theta(Y_0)\right)\left(\frac{f_{\theta_0}(Y_\delta) - f_\theta(Y_\delta)}{\sigma^2(Y_0)}\right)\right] \\ &+ E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^j\partial\theta^i}f_\theta(Y_0)\right)\left(\frac{\eta_o}{\sigma^2(Y_0)}\right)\right] \\ &- \frac{\delta}{2}E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}f_\theta(Y_0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}f_\theta(Y_0) + \frac{\partial}{\partial\theta^j}f_\theta(Y_\delta)\right)/\sigma^2(Y_0)\right] \end{aligned}$$

Posons:

$$\begin{aligned} R_1(\theta, \delta) &= E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^j\partial\theta^i}f_\theta(Y_0)\right)\left(\frac{f_{\theta_0}(Y_0) - f_\theta(Y_0)}{\sigma^2(Y_0)}\right)\right] \\ &+ E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^j\partial\theta^i}f_\theta(Y_0)\right)\left(\frac{f_{\theta_0}(Y_\delta) - f_\theta(Y_\delta)}{\sigma^2(Y_0)}\right)\right] \\ R_2(\theta, \delta) &= E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}f_\theta(Y_0)\frac{\partial}{\partial\theta^j}f_\theta(Y_\delta) - \frac{\partial}{\partial\theta^i}f_{\theta_0}(Y_0)\frac{\partial}{\partial\theta^j}f_{\theta_0}(Y_\delta)\right)/\sigma^2(Y_0)\right] \\ R_3(\theta, \delta) &= E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^j\partial\theta^i}f_\theta(Y_0)\right)\left(\frac{\eta_o}{\sigma^2(Y_0)}\right)\right] \end{aligned}$$

On note pour tout (i,j) :

$$\begin{aligned} C_i^* &= \left(\sup_{t\in[0,\delta_0]} E_{\theta_0}\left[\left(\sup_{\theta\in\Theta}\left|\frac{\partial}{\partial\theta^i}f_\theta(Y_t)\right|\right)^2/\sigma^2(Y_0)\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\ D_{i,j}^* &= \left(\sup_{t\in[0,\delta_0]} E_{\theta_0}\left[\left(\sup_{\theta\in\Theta}\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^j\partial\theta^i}f_\theta(Y_t)\right|\right)^2/\sigma^2(Y_0)\right]\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ces constantes sont finies et indépendantes de δ et θ, compte tenu des hypothèses (H 2.4) et (H 2.5).

- La première étape du calcul du développement consiste à montrer que pour tout $0\le\delta\le\delta_0$

$$|R_1(\theta,\delta)|\le K_1\,||\theta-\theta_0||$$

où K_1 est une constante indépendante de θ et δ.
Par application de la formule de Rolle et l'inégalité de Schwarz, on a:

$$\left|E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^j\partial\theta^i}f_\theta(Y_0)\right)\left(\frac{f_{\theta_0}(Y_\delta)-f_\theta(Y_\delta)}{\sigma^2(Y_0)}\right)\right]\right|\le D_{i,j}\sum_{k=1}^{p}C_k^*\left|\theta_0^k-\theta^k\right|$$

En appliquant le résultat précédent, aux deux termes de R_1, on a le résultat annoncé.

- D'autre part, en appliquant de nouveau la formule de Rolles et l'inégalité de Schwarz, on obtient pour $0\le\delta\le\delta_0$:

$$|R_2(\theta,\delta)|\le\sum_{k=1}^{p}\left(D_{i,k}C_j^*+C_iD_{j,k}^*\right)\left|\theta^k-\theta_0^k\right|$$

Or, pour $M_{i,j}$ définie en (H 2.6) :

$$\begin{aligned} &E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}f_\theta(Y_0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}f_\theta(Y_0)+\frac{\partial}{\partial\theta^j}f_\theta(Y_\delta)\right)/\sigma^2(Y_0)\right] \\ &= 2M_{i,j}(0)+(M_{i,j}(\delta)-M_{i,j}(0))+R_2(\theta,\delta)+R_2(\theta,0) \end{aligned}$$

avec : $|R_2(\theta,\delta)+R_2(\theta,0)|\le K_2\,||\theta-\theta_0||$

- Enfin,

$$|R_3(\theta,\delta)|\le\frac{\delta^3}{12}D_{i,j}\sup_{t\in[0,\delta_0]}\left(E_{\theta_0}\left[\left(A_{\theta_0}^2f_{\theta_0}(Y_t)\right)^2/\sigma^2(Y_0)\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$K_3=\sup_{t\in[0,\delta_0]}\left(E_{\theta_0}\left[\left(A_{\theta_0}^2f_{\theta_0}(Y_t)\right)^2/\sigma^2(Y_0)\right]\right)^{\frac{1}{2}}$ est finie et indépendante de δ et θ, du fait de (H 2.4) et (H 2.5).

On a donc le développement annoncé, en posant
$R(\theta,\delta)=R_1(\theta,\delta)+R_2(\theta,\delta)+R_2(\theta,0)+R_3(\theta,\delta)$.

C Démonstration du lemme 4 : développement de $\Gamma(\theta_\delta)$

On suppose que δ est dans un voisinage de 0, il faut en particulier que $\delta \leq \delta_0$. On note pour tout couple (i,j), $[\Gamma(\theta)]_i^j$, l'élément correspondant à la ligne i et à la colonne j de la matrice $\Gamma(\theta)$.
On montre, par les mêmes arguments que ceux utilisés dans le lemme 3 (pour $\theta \to V_\delta^i(\theta)$), que sous (H 2.4) et (H 2.5), $\theta \to \Gamma(\theta)$ est de classe C^3 sur Θ, ses dérivées étant obtenues par dérivation sous le signe somme.
Par application de Taylor-Young, on obtient:

$$[\Gamma(\theta_\delta)]_i^j = [\Gamma(\theta_0)]_i^j + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial}{\partial\theta^k}[\Gamma(\theta_0)]_i^j\right)\left(\theta_\delta^k - \theta_0^k\right) + \varepsilon(\theta_\delta - \theta_0)\,||\theta_\delta - \theta_0||$$

Si on montre successivement que:

1.
$$\Gamma(\theta_0) = \delta H_{\theta_0} + P_{\theta_0}\frac{\delta^2}{2} + o\left(\delta^2\right)$$

2. Il existe $K > 0$, une constante indépendante de δ, telle que, pour tout $k = 1, p$
$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta^k}[\Gamma(\theta_0)]_i^j\right| \leq \delta K$$

nous obtenons alors le développement annoncé. De plus, la démonstration de 2. reposant sur le même type d'argument que 1., nous nous contenterons de montrer 1.
D'après la décomposition (2) donnée dans la propriété 1, on a:

$$\begin{aligned}
[\Gamma(\theta_0)]_i^j &= E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\tilde{W}_0}{\sigma^2(Y_0)}\right)^2\right] \\
&+ E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\eta_0}{\sigma^2(Y_0)}\right)^2\right] \\
&+ 2E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}f_{\theta_0}(Y_0)\right)\frac{\eta_0\tilde{W}_0}{\sigma^2(Y_0)}\right]
\end{aligned}$$

Nous allons étudier successivement chacun des termes intervenant dans la somme précédente.

- Montrons que :

$$E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\tilde{W}_0}{\sigma^2(Y_0)}\right)^2\right] = \delta M_{i,j}(0) + \frac{1}{2}P'_{i,j}(0)\delta^2 + o\left(\delta^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
& E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i} f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j} f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\tilde{W}_0}{\sigma^2(Y_0)}\right)^2\right] \\
= \; & \delta\int_0^\delta P_{i,j}(v)\,dv + 2\delta^2\int_0^1\left(\frac{1}{2}-v\right)Q_{i,j}(\delta v)\,dv \\
+ \; & \delta^3\int_0^1\left(\frac{1}{2}-v\right)^2 E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i} f_{\theta_0}\frac{\partial}{\partial\theta^j} f_{\theta_0}\right)(Y_0)\frac{\left(\sigma f'_{\theta_0}\right)^2(Y_{v\delta})}{\sigma^4(Y_0)}\right]dv \\
- \; & \delta^3\int_0^1(1-v)\,vE_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i} f_{\theta_0}\frac{\partial}{\partial\theta^j} f_{\theta_0}\right)(Y_0)\frac{\left(\sigma^2\left(A_{\theta_0}f_{\theta_0}\right)'\right)(Y_{v\delta})}{\sigma^4(Y_0)}\right]dv \\
- \; & \frac{\delta^4}{2}\int_0^1 vE_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i} f_{\theta_0}\frac{\partial}{\partial\theta^j} f_{\theta_0}\right)(Y_0)\frac{\left(\sigma^2 f'_{\theta_0}\left(A_{\theta_0}f_{\theta_0}\right)'\right)(Y_{v\delta})}{\sigma^4(Y_0)}\right]dv \\
+ \; & \frac{\delta^4}{2}\int_0^1\left(3v^2-2v^3\right)E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i} f_{\theta_0}\frac{\partial}{\partial\theta^j} f_{\theta_0}\right)(Y_0)\frac{\left(\sigma^2 f'_{\theta_0}\left(A_{\theta_0}f_{\theta_0}\right)'\right)(Y_{v\delta})}{\sigma^4(Y_0)}\right]dv \\
+ \; & \frac{\delta^5}{4}\int_0^1(1-v)^2v^2E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i} f_{\theta_0}\frac{\partial}{\partial\theta^j} f_{\theta_0}\right)(Y_0)\frac{\left(\sigma\left(A_{\theta_0}f_{\theta_0}\right)'\right)^2(Y_{v\delta})}{\sigma^4(Y_0)}\right]dv
\end{aligned}
$$

(H 2.6) implique que $t \to \int_0^t P_{i,j}(v)dv$ est de classe C^2 au voisinage de 0, donc par application de la formule de Taylor-Young, on a:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\delta P_{i,j}(v)dv &= P_{i,j}(0)\delta + P'_{i,j}(0)\frac{\delta^2}{2} + o\left(\delta^2\right) \\
&= M_{i,j}(0)\delta + P'_{i,j}(0)\frac{\delta^2}{2} + o\left(\delta^2\right)
\end{aligned}
$$

De plus, par (H 2.6) on a aussi:

$$
\int_0^1\left(\frac{1}{2}-v\right)Q_{i,j}(\delta v)\,dv = \int_0^1\left(\frac{1}{2}-v\right)\left[Q_{i,j}(\delta v) - Q_{i,j}(0)\right]dv = \varepsilon(\delta)
$$

avec, $\varepsilon(\delta) \longrightarrow 0$, quand $\delta \to 0$.
Enfin, d'après (H 2.4) et (H 2.5), les intégrales affectées d'un coefficient δ^k, $k \geq 2$, sont bornées sur un voisinage de 0.
On obtient donc le résultat annoncé.

- Par deux applications successives de l'inégalité de Schwarz, on montre que:

$$
\begin{aligned}
& \left|E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i} f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j} f_{\theta_0}(Y_0)\right)\left(\frac{\eta_0}{\sigma^2(Y_0)}\right)^2\right]\right| \\
& \leq \delta^6 C^i C^j \sup_{t\in[0,\delta_0]}\left(E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\left|A^2_{\theta_0}f_{\theta_0}(Y_t)\right|}{\sigma(Y_0)}\right)^4\right]\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

où $C^i = \left(E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}f_{\theta_0}(Y_0)\right)^4/\sigma^4(Y_0)\right]\right)^{\frac{1}{4}}$

- Enfin, on montre aisément grâce à l'inégalité de Schwarz et aux résultats précedemment obtenus que le double produit restant est un $o(\delta^3)$.

On a donc le développement attendu pour $[\Gamma(\theta_0)]_i^j$. Compte tenu du fait que l'écart entre θ_δ et θ_0 est de l'ordre de δ^2, $\Gamma(\theta_\delta)$ s'écrit donc

$$\Gamma(\theta_\delta) = \delta H_{\theta_0} + P_{\theta_0}\frac{\delta^2}{2} + o\left(\delta^2\right)$$

D Schéma d'approximation d'Euler

D.1 Présentation du schéma

Propriété 3

1. $f \in C^2$ *et* $\sigma \in C^0$

2. $\left(\int_0^t \left[f'\sigma\right](Y_v)\, dW_v\right)_{t\geq 0} \in M^{c,loc}$

Alors, $\forall t \geq 0$,

$$Y_{t+\delta} = Y_t + \delta f(Y_t) + \eta_t + \tilde{W}_t \tag{15}$$

avec:

$$\begin{aligned} \eta_t &= \int_t^{t+\delta} (t+\delta-v)\, Af(Y_v)\, dv \\ \tilde{W}_t &= \int_t^{t+\delta} \sigma(Y_v)\left[1+(t+\delta-v)\, f'(Y_v)\right] dW_v \end{aligned}$$

Si de plus, $E\left(\int_0^t \left[f'\sigma\right]^2 (Y_v)\, dv\right) < +\infty$ *et* $E\left(\int_0^t \sigma^2(Y_v)\, dv\right) < \infty$, *alors* $\left(\tilde{W}_t\right)_{t\geq 0}$ *est une suite de variables de carré intégrable, telles que,* $E\left(\tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_t\right) \overset{p.s.}{=} 0$

D.2 Propriétés asymptotiques de l'estimateur E.M.C.

Le contraste et l'estimateur des moindres carrés associés au schéma d'approximation d'Euler sont donnés par :

$$\breve{U}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{Y_{k\delta} - Y_{(k-1)\delta} - \delta f_\theta\left(Y_{(k-1)\delta}\right)}{\sigma^2\left(Y_{(k-1)\delta}\right)}\right)^2, \quad \breve{\theta}_n = \arg\min_\theta \breve{U}_n(\theta)$$

Notons, pour tout $i = 1, p$, $\breve{V}_\delta^i(\theta) = E_{\theta_0}\left[\frac{\partial}{\partial\theta^i} f_\theta(Y_0)\left(\frac{Y_\delta - Y_0 - \delta f_\theta(Y_0)}{\sigma^2(Y_0)}\right)\right]$. Les conditions d'obtention des propriétés asymptotiques de $\breve{\theta}_n$ sont les suivantes :

Hypothèses H 4 : Schéma d'Euler et E.M.C.

H 4.1 *(H 2.1) est maintenue avec* f_{θ_0} *et* σ *de classe* C^2.

H 4.2 -.3 -.4 -.7 -.8 *On reprend les hypothèses (H 2.2)-(H 2.4), ainsi que (H 2.7) et (H 2.8).*

H 4.5

1. *Pour tout* x, $\theta \to f_\theta(x)$ *est de classe* C^3 *sur* Θ *et cette fonction, ainsi que ses dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre 3 sont à croissance polynômiale en* x *uniformément sur* Θ
2. f'_{θ_0} *et* $A_{\theta_0} f_{\theta_0}$ *sont à croissance polynômiale en* x.

H 4.6 *Pour tout i, j, les fonctions suivantes sont continues au voisinage de 0:*

$$\begin{aligned}
\breve{N}_i(v) &= E_{\theta_0}\left[\frac{\partial}{\partial\theta^i} f_{\theta_0}(Y_0)\,\frac{A_{\theta_0} f_{\theta_0}(Y_v)}{\sigma^2(Y_0)}\right] \\
P_{i,j}(v) &= E_{\theta_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i} f_{\theta_0}\frac{\partial}{\partial\theta^j} f_{\theta_0}\right)(Y_0)\,\frac{\sigma^2(Y_v)}{\sigma^4(Y_0)}\right]
\end{aligned}$$

On note $\breve{N}_{\theta_0} = \left(\breve{N}_i(0)\right)_i$

H 4.9 *Il existe un unique $\breve{\theta}_\delta \in \overset{\circ}{\Theta}$ tel que pour tout $i = 1, p$, $\breve{V}_\delta^i(\theta_\delta) = 0$.*

Théorème 6 *Sous (H 4), pour H_{θ_0} et $\breve{N}_{\theta_0}$ définie en (H 4.6), on a lorsque $n \to \infty$:*

$$\breve{\theta}_n \xrightarrow{P_{\theta_0}} \breve{\theta}_\delta \qquad et \qquad \sqrt{n\delta}\left(\breve{\theta}_n - \breve{\theta}_\delta\right) \xrightarrow{D\left(P_{\theta_0}\right)} N_p\left(0, \breve{V}(\theta_0)\right)$$

avec:

$$\begin{aligned}
\breve{\theta}_\delta - \theta_0 &= \frac{1}{2} H_{\theta_0}^{-1} \breve{N}_{\theta_0}\delta + o(\delta) \\
\breve{V}(\theta_0) &= H_{\theta_0}^{-1}\left(I_p + o(1)\right)
\end{aligned}$$

Prépublications du SAMOS (depuis 1995)

1995

40 - Claude BOUZITAT, Gilles PAGES
Pour quelques images de plus..., 12 p.

41 - Jean-Claude FORT, Gilles PAGES
About the Kohonen algorithm: Strong or Weak Self-organisation? 15 p.

42 - Marie COTTRELL, Patrick LETREMY
Classification et analyse des correspondances au moyen de l'algorithme de Kohonen: application à l'étude de données socio-économiques. 10 p.

43 - Joël CHADOEUF, Xavier GUYON, Jian-Feng YAO
Sur l'ergodicité de l'estimation par Restauration-Estimation de modèles incomplètement observés. 11 p.

44 - Jean-Gabriel ATTALI, Gilles PAGES
Approximation of functions by perceptrons, a new approach. 11 p.

45 - Marie COTTRELL, Bernard GIRARD, Yvonne GIRARD, Corinne MULLER, Patrick ROUSSET
Daily electrical power curves : classification and forecasting using a Kohonen map. 8 p.

46 - Fabienne COMTE, Cécile HARDOUIN
Regression on log-regularized periodogram for fractional models at low frequencies. 19 p.

47 - Fabienne COMTE, Cécile HARDOUIN
Regression on log-regularized periodogram under assumption of bounded spectral densities: the non fractional and the fractional cases. 14 p.

48 - Patrick ROUSSET
Prévision des courbes demi-horaires au moyen d'une classification de Kohonen. 25 p.

49 - Smail IBBOU et Marie COTTRELL
Multiple Correspondence analysis of a crosstabulations matrix using the Kohonen algorithm. 6 p.

50 - Philippe JOLIVALDT
Schémas de discrétisation pour la simulation et l'estimation d'un CAR(2): une étude expérimentale. 22 p.

51 - Philippe JOLIVALDT
Utilisation de méthodes implicites pour la simulation et l'estimation de modèles CAR(2) . 14 p.

1996

52 - Samuel BAYOMOG
Estimation of a Markov field dynamic. 14 p.

53 - Morgan MANGEAS et Jian-feng YAO
Sur l'estimateur des moindres carrés des modèles auto-régressifs fonctionnels. 19 p.

54 - Marie COTTRELL, Florence PIAT, Jean-Pierre ROSPARS
A Stochastic Model for Interconnected Neurons. 17 p.

55 - Marie COTTRELL, Jean-Claude FORT, Gilles PAGES
Two or three mathematical things about the Kohonen algorithm. 31 p.

56 - Marie COTTRELL, Bernard GIRARD, Patrick ROUSSET

Forecasting of curves using a Kohonen classification. 14 p.

57 - Jean-Claude FORT, Gilles PAGES
Quantization vs Organization in the Kohonen S.O.M. 5 p.

58 - Eric de BODT, Marie COTTRELL, Michel LEVASSEUR
Réseaux de neurones en finance.33 p.

59 - Marie COTTRELL, Eric de BODT, Emmanuel HENRION, Ismaïl IBBOU, Annick WOLFS, Charles Van WYMEERSCH
Comprendre la décision à l'aide d'une carte de Kohonen. Une étude empirique. 16 p.

60 - Marie COTTRELL, Eric de BODT
Understanding the leasing decision with the help of a Kohonen map. An empirical study of the Belgian market. 5p.

61 - Marie COTTRELL, Eric de BODT, Philippe GREGOIRE
The relation between interest rate shocks and the initial rate structure: an empirical study using a Kohonen map. 16p.

62 - Marie COTTRELL, Eric de BODT, Philippe GREGOIRE
A kohonen map representation to avoid misleading interpretation. 8p.

63 - Marie COTTRELL, Eric de BODT
Analyzing shocks on the interest rate structure with Kohonen map. 6p.

64 - Marie COTTRELL, Eric de BODT, Philippe GREGOIRE
Simulating interest rate structure evolution on a long term horizon. A kohonen map application. 5p.

65 - Fabienne COMTE, Cécile HARDOUIN
Log-regularized periodogram regression. 22p.

66 - Jian Feng YAO
Simulation et optimisation sous contrainte par une dynamique de Metropolis. 6p.

67 - Morgan MANGEAS, Jian-feng YAO
On least squares estimation for nonlinear autoregressive processes. 16p.

68 - Carlo GAETAN, Xavier GUYON
Simulation des modèles de Gibbs spatiaux par chaine de Markov. 28p.

69 - François GARDES, Patrice GAUBERT, Patrick ROUSSET
Cellulage de données d'enquêtes de consommation par une méthode neuronale. 41p.

70 - Serge IOVLEFF, José R. León
High-Frequency approximation for the Helmholtz equation :a probabilistic approach. 14p.

1997

71 - Xavier Guyon et Jian-feng Yao
On description of wrong parametrisation sets of a model . 23p.

72 - Sandie Souchet
Schéma de discrétisation anticipatif et estimation du paramètre d'une diffusion. 36p.

73 - M. Cottrell, J.C. Fort, G. Pagès
Theoretic aspects of the SOM algorithm 22p.

74 - M. Benaïm, J.C. Fort & G. Pagès
Convergence of the one-dimensional Kohonen algorithm. 23p.

75 - C. Bouton & G. Pagès
About the multidimensional competitive learning vector quantization algorithm with constant gain. 36p.

76 - M. Cottrell, P. Rousset
The Kohonen algorithm: a powerful tool for analyzing and reprenting multidimensional quantitative and qualitative data 12p.

77 - M. Cottrell, B. Girard et P. Rousset
Long term forecasting by combining Kohonen algorithm and standard prevision . 6p.

78 - S. Souchet
Schéma d'approximation adapté à l'ordre *p* et estimation du paramètre de dérive d'une diffusion