

Estimation du paramètre de dérive d'une diffusion sous des conditions d'irrégularité de la dérive.

Sandie SOUCHET
SAMOS, Université Paris 1^a

Résumé

Soit le modèle de diffusion unidimensionnel à seuil :

$$dX_t = b(X_t; r_0) dt + dB_t$$

Dans le cas considéré, b est lipschitzienne sur \mathbb{R} et 0 est un seuil pour sa dérive; b^0 est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et admet des limites à gauche et à droite en 0, finies mais différentes. Notre but est d'estimer r_0 à partir d'une observation discrétisée du processus, $(X_{kh_n})_{k=0:n}$, sous des conditions de stationnarité et d'ergodicité, lorsque $nh_n \rightarrow 1$ et $h_n \rightarrow 0$.

Nous introduisons pour cela l'estimateur des moindres carrés basé sur le schéma d'approximation d'Euler. Si $nh_n \rightarrow 1$ et $h_n \rightarrow 0$, cet estimateur est consistant. Si de plus, $nh_n^3 \rightarrow 0$, nous montrons qu'il est asymptotiquement normal à la vitesse $\sqrt{nh_n}$.

Abstract

Let be the following one-dimensional threshold diffusion model :

$$dX_t = b(X_t; r_0) dt + dB_t$$

We consider the case when b is Lipschitz continuous on \mathbb{R} and 0 is a threshold for its first derivative; b^0 is continuous on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ and the right and left limits in 0 are finite, but different. We want to estimate r_0 from discrete observations of the stationary ergodic solution process, $(X_{kh_n})_{k=0:n}$, as $nh_n \rightarrow 1$ and $h_n \rightarrow 0$.

For that purpose, we introduce the least squares estimator based on the approximate discrete-time Euler's scheme. If $nh_n \rightarrow 1$ and $h_n \rightarrow 0$, this estimator is consistent. Moreover if $nh_n^3 \rightarrow 0$, we prove that it is asymptotically normal with a rate of order $\sqrt{nh_n}$.

Mots clefs

Schéma d'approximation d'Euler; estimateur des moindres carrés; modèle à seuil; diffusion stationnaire et ergodique; temps local.

A.M.S. 62 M 05 - 62 F 12.

1 Introduction

Soit $(-; F; P)$ un espace de probabilité, $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard issu de 0 et τ une variable indépendante de B , définies sur l'espace probabilité.

^aCentre Pierre Mendès France, 90, rue de Tolbiac 75013 PARIS

de la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(G_s; 0 \leq s \leq t)$, où $G_t = \sum_{i=1}^N \delta_{t_i}$ est la tribu $G_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t)$ complétée par $N = \{t_i; 0 \leq t_i \leq T\}$; $P(G) = 0$.

On considère l'équation différentielle stochastique (e.d.s.) définie par :

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X_t; r_0) dt + dB_t; \quad 0 \leq t \leq T \\ X_0 &= x_0 \end{aligned} \quad (1)$$

où b est une fonction connue et r_0 est un paramètre inconnu que l'on désire estimer. On définit, pour tout réel a , C_{fag}^2 , l'ensemble des fonctions f continues sur \mathbb{R} , de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ telles que, si l'on note f' sa dérivée première, $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = f'(a^+)$ existent et sont finies avec $f'(a^+) \neq f'(a^-)$. Dans la suite, nous considérons une fonction b appartenant à C_{fag}^2 et nous nommerons b seuil un tel modèle; un prototype est :

$$dX_t = b_1(X_t; r_0) I_{(X_t > r_0)} + b_2(X_t; r_0) I_{(X_t \leq r_0)} dt + dB_t \quad (2)$$

où b_1 et b_2 sont de classe C^2 sur \mathbb{R} , telles que $b_1(0) = b_2(0)$ et $b_1'(0) \neq b_2'(0)$.

Sous l'hypothèse $b \in C_{fag}^2$, le modèle étudié appartient à la classe plus générale des modèles réguliers : $x \mapsto b(x; r)$ continue et différentiable en moyenne quadratique par rapport à r . Dans [12], Kutoyants montre que, pour un modèle régulier, l'estimateur du maximum de vraisemblance (E.M.V.) associé à une observation continue du processus stationnaire ergodique sur $[0; T]$ est consistant, asymptotiquement normal à la vitesse standard \sqrt{T} et asymptotiquement efficace au sens des estimateurs asymptotiquement minimax selon Hajek [6] ($T \rightarrow +\infty$). Notre but est de fournir, dans le cas d'une diffusion à seuil, une estimation de r_0 , consistante et asymptotiquement normale avec une vitesse et une variance asymptotique identiques à celles de l'estimateur du maximum de vraisemblance, mais basée sur une observation discrétisée à pas $\Delta_n = h_n$ ($h_n \rightarrow 0$) du processus : $(X_{kh_n})_{k=0:n}$ avec $nh_n = T$. Nous nous basons pour cela sur l'estimateur des Moindres Carrés (M.C.) associés au schéma d'approximation d'Euler.

Lorsque $(X_t)_{t \in [0; T]}$ est ergodique et la fonction de dérive est de classe C^2 sur \mathbb{R} (modèle C^2), les résultats de Florens-Zmirou [5] impliquent la consistance de cet estimateur sous la condition $nh_n \rightarrow 1$ et $h_n \rightarrow 0$. Si de plus $nh_n^3 \rightarrow 0$, il est asymptotiquement normal avec la vitesse $\sqrt{nh_n}$ et une variance limite égale à l'inverse de l'information de Fisher. Nous allons montrer que cet estimateur conserve ses propriétés asymptotiques sous des conditions analogues lorsque $b \in C_{fag}^2$, si l'on impose que b soit lipschitzienne. Nous établirons en outre que cet estimateur est asymptotiquement équivalent à l'E.M.V. basé sur une observation continue de la trajectoire sur $[0; T]$.

Dans une deuxième partie, nous présentons le schéma d'approximation d'Euler pour les diffusions à seuil. Le § 3 regroupe les hypothèses et résultats techniques permettant l'étude du comportement asymptotique de l'estimateur dérivé des moindres carrés et du schéma d'Euler. Dans la section 4, nous prouvons la consistance de cet estimateur lorsque $nh_n \rightarrow 1$ et $h_n \rightarrow 0$. Le § 5 est consacré à l'étude de la loi asymptotique. Le fait que le contraste ne soit pas de classe C^2 sur tout \mathbb{R} , nous oblige à recourir à un schéma de démonstration différent des techniques habituellement utilisées (dérivation du contraste au point d'estimation). Nous commençons par établir la vitesse de convergence de l'estimateur en imposant un premier renforcement de l'hypothèse de décroissance de la suite (h_n) , vers 0 : si nh_n^3 est bornée, nous obtenons une vitesse de convergence de l'estimateur en $\sqrt{nh_n}$. Nous montrons ensuite que l'estimateur est

asymptotiquement normal, sous la condition supplémentaire $nh_n^3 \rightarrow 0$. Dans la sixième partie, nous expérimentons les résultats précédents pour un modèle de diffusion particulier du type de (2) : un CTAR(1) (modèle AR à seuil et à temps continu) à raccordement continu. Notons que ces diffusions à seuil, sans hypothèse de continuité sur la dérive, sont étudiées dans [1], [2] et [8]. Dans le dernier paragraphe, nous comparons l'E.M.V. en temps continu et notre estimateur. Plus particulièrement, nous montrons qu'ils sont asymptotiquement équivalents.

2 Résultat d'approximation d'Euler pour les modèles à seuil

Considérons l'e.d.s. définie par :

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t; \quad 0 \leq t \leq T \\ X_0 &= x \end{aligned} \quad (3)$$

Soit $X = (X_t)_{t \in [0;T]}$ une solution de cette équation sur $(-; F; P)$ et notons E l'espérance sous P . Pour un modèle C^2 , le schéma d'approximation d'Euler à pas h permet d'approcher le modèle discret exact avec une erreur de l'ordre $O_P(h^2)$ [13]. Pour les diffusions à seuil, le résultat est le suivant :

Lemme 1 (Schéma d'Euler pour les modèles à seuil)

Supposons que :

1. $b \in C_{\text{rag}}^2$ et σ est continue sur \mathbb{R} .
2. Pour tout $t \geq 0$, $E \int_0^t \sigma^2(X_u) du < 1$ et $E \int_0^t [b^{\pm}]^2(X_u) du < 1$.

Alors :

$$\forall t \geq 0; \quad X_{t+h} = X_t + h b(X_t) + \hat{\epsilon}_t + \epsilon_t$$

avec :

$$\hat{\epsilon}_t = \int_t^{t+h} (t+h-j) h \sigma(X_j) ds + \frac{1}{2} \int_t^{t+h} b''(X_j) a^{\pm}(j) b^{\pm}(X_j) \int_t^{t+h} [L_s(a) - L_t(a)] ds$$

où $h(x) = b(x) b^0(x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) b^{00}(x)$ et $(L_t(a))_{t \geq 0}$ est le temps local de $(X_t)_{t \geq 0}$ en a ([10], p.218). De plus, $(\epsilon_t)_{t \geq 0}$ est une suite de variables de carré intégrable, telles que $E[\epsilon_t | F_t] = 0$ et définies par :

$$\epsilon_t = \int_t^{t+h} \sigma(X_s) \epsilon_1 + (t+h-j) b^0(X_s) dB_s$$

Commentaire :

La différence entre le cas C^2 et le cas à seuil réside dans l'ordre de grandeur de la variable d'erreur $\hat{\epsilon}_t$. Dans le premier cas, elle est en $O_P(h^2)$. Ceci n'est plus vrai pour les diffusions à seuil du fait de l'apparition du temps local. Cependant, si b est lipschitzienne, on va montrer que dans les deux cas, $E(j-t) \leq C h^2$. Ainsi, lorsque la dérive dépend d'un paramètre de translation r_0 , qu'il s'agisse d'une diffusion à seuil ou d'un modèle C^2 [5], si $nh_n^3 \rightarrow 1$ et $nh_n^3 \rightarrow 0$, les M.C. associés au schéma d'Euler fournissent un estimateur consistant et asymptotiquement normal de r_0 .

Démonstration du lemme 1 :

La démonstration de ce résultat repose sur le lemme suivant dont la démonstration est donnée en annexe A.

Lemme 2 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une semi-martingale continue, $X_t = X_0 + M_t + V_t$, et f un élément de C_{lag}^2 . Alors, pour tout $t \geq 0$:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s + \int_0^t f''(X_s) dL_s(a) \quad (4)$$

Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$X_{t+\varepsilon} = X_t + \varepsilon b(X_t) + \int_t^{t+\varepsilon} (b(X_s) - b(X_t)) ds + \int_t^{t+\varepsilon} \frac{1}{2} \varepsilon^2 f''(X_s) dB_s$$

Par application du lemme 2, on a pour tout $s \in [t; t + \varepsilon]$:

$$b(X_s) - b(X_t) = \int_t^s \frac{1}{2} f''(X_u) dB_u + \int_t^s \frac{1}{2} f''(X_u) du + \int_t^s f''(X_u) dL_s(a) - \int_t^s f''(X_u) dL_t(a) \quad (5)$$

Donc :

$$db(X_t) = h(X_t) dt + \frac{1}{2} f''(X_t) dB_t + \int f''(X_t) dL_t(a) \quad (6)$$

avec $h(x) = \frac{1}{2} f''(x)$.

D'après (6) et la formule de Ito appliquée au processus $(b(X_s))_{s \geq 0}$, on a :

$$\begin{aligned} (t + \varepsilon) b(X_{t+\varepsilon}) - t b(X_t) &= \int_t^{t+\varepsilon} b(X_s) ds + \int_t^{t+\varepsilon} s db(X_s) \\ &= \int_t^{t+\varepsilon} b(X_s) ds + \int_t^{t+\varepsilon} s h(X_s) ds \\ &\quad + \int_t^{t+\varepsilon} s \frac{1}{2} f''(X_s) dB_s + \int_t^{t+\varepsilon} f''(X_s) dL_s(a) \end{aligned}$$

De plus, si l'on multiplie (5) par $(t + \varepsilon)$, on obtient :

$$\begin{aligned} (t + \varepsilon) b(X_{t+\varepsilon}) - (t + \varepsilon) b(X_t) &= \int_t^{t+\varepsilon} (t + \varepsilon) \frac{1}{2} f''(X_s) dB_s + \int_t^{t+\varepsilon} (t + \varepsilon) h(X_s) ds \\ &\quad + \int_t^{t+\varepsilon} f''(X_s) [(t + \varepsilon) L_{t+\varepsilon}(a) - (t + \varepsilon) L_t(a)] \end{aligned}$$

En soustrayant membre à membre les deux égalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\varepsilon} (b(X_s) - b(X_t)) ds &= \int_t^{t+\varepsilon} (t + \varepsilon - s) \frac{1}{2} f''(X_s) dB_s + \int_t^{t+\varepsilon} (t + \varepsilon - s) h(X_s) ds \\ &= \int_t^{t+\varepsilon} f''(X_s) [(t + \varepsilon) L_{t+\varepsilon}(a) - (t + \varepsilon) L_t(a) - \int_t^{t+\varepsilon} s dL_s(a)] \end{aligned} \quad \#$$

Or, appliquant la formule de Ito au processus $(sL_s(a))_{s \geq 0}$, on a :

$$(t + \varepsilon) L_{t+\varepsilon}(a) - (t + \varepsilon) L_t(a) - \int_t^{t+\varepsilon} s dL_s(a) = \int_t^{t+\varepsilon} L_s(a) ds - \varepsilon L_t(a)$$

On obtient ainsi le résultat annoncé. \square

3 Hypothèses et résultats préliminaires

On définit $L_0^2(1) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(0) = 0; \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx < \infty\}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\|f\|_{p,1} = [\int_{-\infty}^{\infty} (|f(x)|^p + |f'(x)|^p) dx]^{1/p}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $B_{kh_n} = B_{kh_n} - B_{(k-1)h_n}$ représente l'accroissement brownien entre kh_n et $(k-1)h_n$.

On note pour $s \in [0; T]$, $b_s(r) = b(X_s; r)$, et pour $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, $M_{a,b} = \max\{|a|; |b|\}$.

On suppose que $r_0 \in]a; b[$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Posons les conditions suivantes (A) :

(A 1) b appartient à $C_{f_0}^2$ et il existe $K > 0$ telle que :

$$|b(x; y) - b(x; y)| \leq K|x - y|$$

On suppose de plus que $b^{(0)}$ est à croissance polynomiale.

(A 2) Notons $s_{r_0}(x) = \exp\left(-\int_{r_0}^x b(y; r_0) dy\right)$ la dérivée de la fonction d'échelle associée à (1) et supposons que :

$$\int_0^1 s_{r_0}(x) dx = \int_{-1}^0 s_{r_0}(x) dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 [s_{r_0}(x)]^{i-1} dx = C(r_0) < 1$$

Notons ν_{r_0} la loi de densité $q_{r_0}(x) = [C(r_0) s_{r_0}(x)]^{i-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

(A 3) La loi de ν_{r_0} est ν_{r_0} .

(A 4) Notons $\mathcal{M}_{r_0}^t$ le semi-groupe associé à (1).

ν_{r_0} admet des moments de tous ordres et il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\|f\|_{2,1_{r_0}} \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \exp(i \pm t) dx$$

On peut faire les observations suivantes sur (A) :

1. Hansen et Scheinkman donnent dans [7] (proposition 9, p.801) des conditions suffisantes pour vérifier (A 4). Sous (A 1), (A 2) et (A 3), il suffit de montrer que :

(a) $\liminf_{x \rightarrow +\infty} q_{r_0}(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2b(x; r_0)}$ existe et est finie.

(b) $\liminf_{x \rightarrow -\infty} q_{r_0}(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2b(x; r_0)}$ existe et est finie.

Cette hypothèse est par exemple vérifiée pour un CTAR(1) (cf. x 6).

2. Sous (A 1), b^0 est bornée sur \mathbb{R} par K .

3. Soit (E_r) l'e.d.s. définie par :

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X_t; r) dt + dB_t; \quad 0 \leq t \leq T \\ X_0 &= x \end{aligned}$$

Si (A 1) est satisfaite alors, pour tout $r \in \mathbb{R}$, (E_r) admet une unique solution forte $X^r = (X_t^r)_{t \in [0;T]}$. Nous noterons P_r^T la loi de ce processus (Proposition 0.2.3, [4]). De plus, le modèle considéré étant un modèle de translation, si (A 2) et (A 4) sont satisfaites relativement à (1) alors elles restent vraies relativement à (E_r) ($\forall r \in \mathbb{R}$). Ainsi, sous les hypothèses précédentes, $X^r = (X_t^r)_{t \in [0;T]}$ est récurrenente positive et $\frac{1}{2}$ -mélangeante et ceci quelque soit $r \in \mathbb{R}$. La condition (A 3) implique que $X^{r_0} = (X_t^{r_0})_{t \in [0;T]}$ est de plus strictement stationnaire.

4. Sous (A 1) et (A 2), $u \mapsto b(t; u)$ est dérivable en tout point $r \in \mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, de dérivée $\dot{b}(t; r)$ avec :

$$b(y) = \int_{(y>0)} b^0(y) dy + \int_{(y=0)} b^0(y) dy \quad (7)$$

Cette dérivée $\dot{b}(t; u)$ est de plus continue en tout point r dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On montre en effet que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} b(x; r; h) \dot{b}(x; r) + h \dot{b}(x; r) \int_{\mathbb{R}^d} q_r(x) dx = o(|h|^2)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} b(x; r; h) \dot{b}(x; r) \int_{\mathbb{R}^d} q_r(x) dx = o(1)$$

Ce résultat repose sur le lemme 11 (x 5, p.12).

5. Sous les hypothèses précédentes, l'information de Fisher asymptotique au point r , $I(r)$, associée à la famille de lois de probabilité $\{P_r^T\}_{r \in]a;b[}$ est ainsi donnée par :

$$I(r) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} b(x; r) \dot{b}(x; r) d^1_r \quad (8)$$

On vérifie également que : $\forall r; I(r) = I(0) > 0$.

Le modèle étant un modèle de translation, on peut raisonner sans perte de généralité en prenant $r_0 = 0$. Dans la suite, nous noterons : $\forall t \in [0; T], X_t^0 = X_t$.

Nous terminerons ce paragraphe en énonçant deux propriétés et un lemme qui nous serviront par la suite.

Propriété 1 Sous (A) et si $(h_n)_{n \geq 0}$ est bornée, il existe une constante¹ C telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^d$ et tout n , on a :

$$E \left[\sum_{k \in \mathbb{N}^d} X_{kh_n}^i E \left[\sum_{j \in \mathbb{N}^d} X_{kh_n}^j F_{(k+1)h_n}^i \right] \right] \leq C h_n^2$$

Propriété 2 Sous (A), il existe C telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^d$ et tout n , on a :

$$E \left[\sum_{k \in \mathbb{N}^d} \sum_{j \in \mathbb{N}^d} X_{kh_n}^j F_{(k+1)h_n}^i \right] \leq C h_n^2$$

Les démonstrations de ces propriétés sont données respectivement en annexes B et C.

¹Dans la suite, l'ensemble des constantes introduites sont finies et strictement positives.

Lemme 3 Sous (A), pour toute f dans $L^2_0(1_0)$, on a, si $nh_n \rightarrow 1$ et $h_n \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{(k-1)h_n}) \xrightarrow{L^2(P)} 0$$

Démonstration :

Si $f \in L^2_0(1_0)$, on a, du fait de la stationnarité, $E \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{(k-1)h_n}) \right] = 0$. En outre, pour $k < j$, en utilisant l'inégalité de Schwarz et l'hypothèse (A.4), on a :

$$\begin{aligned} E [f(X_{kh_n}) f(X_{jh_n})] &= E [f(X_{kh_n}) E[f(X_{jh_n}) | \mathcal{F}_{kh_n}]] \\ &= \int \int f(x) f(y) \exp(i(j-k)h_n) f_{2,1_0}^{-1}(y-x) \exp(i \pm (j-k)h_n) \\ &= \int \int f(x) f(y) \exp(i \pm (j-k)h_n) \exp(i \pm (j-k)h_n) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{(k-1)h_n}) \right] &= \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leq k < j \leq n} \int \int f(x) f(y) \exp(i \pm (j-k)h_n) \exp(i \pm (j-k)h_n) \\ &= \frac{1}{n} \int \int f(x) f(y) \exp(i \pm h_n) \exp(i \pm h_n) \end{aligned}$$

Or, si $nh_n \rightarrow 1$ et $h_n \rightarrow 0$, $n(1 - \exp(i \pm h_n)) \rightarrow 1$. On a donc la convergence annoncée. \square

4 Etude de la consistance

La fonction d'estimation obtenue en couplant la méthode des M.C. au schéma d'approximation d'Euler est donnée par :

$$U_n(r) = \frac{1}{nh_n^2} \sum_{k=1}^n X_{kh_n} X_{(k-1)h_n} h_n b(X_{(k-1)h_n}) r^2$$

Nous allons commencer par vérifier que U_n est bien un contraste au sens de la définition 3.2.7 de [4]. U_n s'exprime en outre en fonction de la martingale centrée M_n et du reste R_n définis par :

$$M_n(r) = \sum_{k=1}^n b_{(k-1)h_n}(r) X_{kh_n} - E[X_{kh_n} | \mathcal{F}_{(k-1)h_n}]$$

$$R_n(r) = \sum_{k=1}^n b_{(k-1)h_n}(0) - b_{(k-1)h_n}(r) - E[X_{kh_n} | \mathcal{F}_{(k-1)h_n}] - X_{(k-1)h_n} h_n b_{(k-1)h_n}(0)$$

Ces deux variables satisfont les lemmes suivants qui sont des conséquences directes respectivement des propriétés 1 et 2.

Lemme 4 Sous (A) et si $(h_n)_{n \geq 0}$ est bornée, il existe C telle que pour tout couple $(r; s) \in [a; b]^2$ et tout $n \geq 2N^a$:

$$E (M_n(r))^2 \leq Cnh_n \text{ et } E (M_n(r) - M_n(s))^2 \leq Cnh_n (r - s)^2$$

et

Lemme 5 Sous (A), il existe C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E} \int_{[a; b]} |U_n(r) - U_n(0)|^2 \leq C \int_{[a; b]} |U(r; 0)|^2 \quad (9)$$

$$\mathbb{E} \int_{[a; b]} |U_n(r) - U_n(0)|^2 \leq C \int_{[a; b]} |U(r; 0)|^2 \quad (10)$$

$$\mathbb{E} \int_{[a; b]} |U_n(r) - U_n(0)|^2 \leq C \int_{[a; b]} |U(r; 0)|^2 \quad (11)$$

Utilisant ces deux lemmes, on montre que :

Lemme 6 Sous (A), lorsque $nh_n \rightarrow 1$ et $h_n \rightarrow 0$, on a :

$$\mathbb{E} \int_{[a; b]} |U_n(r) - U_n(0)|^2 \leq C \int_{[a; b]} |U(r; 0)|^2$$

où $r \mapsto U(r; 0)$ est une fonction continue et positive, qui admet un unique minimum en $r = 0$.

Démonstration :

Pour tout $r \in [a; b]$, on a :

$$U_n(r) - U_n(0) = \frac{2}{nh_n} (M_n(0) - M_n(r)) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^3 b_{(k-1)h_n}(0) - b_{(k-1)h_n}(r) + \frac{2}{nh_n} R_n(r)$$

D'où, d'après les lemmes 5 et 4 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_{[a; b]} |U_n(r) - U_n(0)|^2 &\leq \frac{2}{nh_n} \mathbb{E} \int_{[a; b]} |M_n(0) - M_n(r)|^2 + \frac{2}{nh_n} \mathbb{E} \int_{[a; b]} |R_n(r)|^2 \\ &+ \mathbb{E} \int_{[a; b]} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^3 b_{(k-1)h_n}(0) - b_{(k-1)h_n}(r) \right|^2 |U(r; 0)|^2 \\ &\leq C \left(\frac{1}{nh_n} + h_n M_{a,b} \right) \int_{[a; b]} |U(r; 0)|^2 \end{aligned}$$

De plus, le lemme 3 implique que si $nh_n \rightarrow 1$ et $h_n \rightarrow 0$, on a :

$$\mathbb{E} \int_{[a; b]} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^3 b_{(k-1)h_n}(0) - b_{(k-1)h_n}(r) \right|^2 |U(r; 0)|^2 \rightarrow 0$$

Pour tout r dans $[a; b]$, on obtient la convergence dans $L^1(P)$ de $U_n(r) - U_n(0)$ vers $U(r; 0)$. Montrons que $r \mapsto U(r; 0)$ est une fonction continue qui admet un unique minimum en $r = 0$. Par hypothèse, b est lipschitzienne et φ_0 admet des moments de tous ordres. Par application du théorème de Lebesgue, on obtient la continuité de U sur \mathbb{R} .

Si l'on suppose qu'il existe $r \neq 0$ et $U(r; 0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $b(x; r) =$

$b(x)$. On a ainsi : $b^0(F^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{b(F+h) - b(F)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{b(h) - b(0)}{h} = b^0(0^+)$ et de même $b^0(F_i) = b^0(0_i)$. Or, $b^0(F^+) = b^0(F_i)$. On obtient donc $b^0(0^+) = b^0(0_i)$ ce qui contredit l'hypothèse $b \in C_{fog}^2$. \square

Notons b_n l'estimateur du minimum de contraste associé à U_n (définition 3.2.7, [4]) :

$$b_n = \inf_{r \in [a; b]} U_n(r)$$

Avant de démontrer la consistance de b_n , il nous faut énoncer une version simplifiée du théorème 19 de Ibragimov et Has'minskii ([9], annexe I, p.372) :

Lemme 7 Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère $(Y_r)_{r \in [a; b]}$ un processus continu à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose qu'il existe trois constantes $C, \alpha > 1$ et $\beta > 0$ telles que, pour tout couple $(r; u) \in [a; b]^2$ vérifiant $r + u \in [a; b]$, on a :

$$E [|Y_r - Y_u|^\alpha] \leq C |r - u|^\beta$$

Alors, si on note $V(Y; L; \pm) = \sup_{r, u \in [a; b]; |r - u| \leq L} |Y_r - Y_u|$, on a :

$$E [V(Y; L; \pm)] \leq C L^{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

où C est une constante qui ne dépend que de C et α .

Théorème 1 Sous (A), si $nh_n \rightarrow 1$ et $h_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow b^0$

Démonstration :

La démonstration de ce résultat repose sur la vérification des hypothèses du théorème 3.2.8. de [4]. La compacité de l'espace du paramètre et les continuités de $r \mapsto U_n(r)$ et $r \mapsto U(r; 0)$ sont bien vérifiées. Pour montrer la consistance de b_n , il suffit alors d'exhiber une variable $V_n(\cdot)$ telle que, pour la fonction V définie au lemme 7 :

$$\|V_n(\cdot) - V(U_n; M_{a; b}; \cdot)\| \xrightarrow{p.s.} 0 \text{ et } V_n(\cdot) \xrightarrow{p.s.} \hat{A}(\cdot)$$

où \hat{A} est une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ qui vérifie $\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{A}(\delta) = 0$.

Pour tout $(r; u)$, on a :

$$\begin{aligned} U_n(r) - U_n(u) &= \frac{2}{nh_n} (M_n(u) - M_n(r)) + \frac{2}{nh_n} (R_n(r) - R_n(u)) \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^h b_{(k-1)h_n}(u) - b_{(k-1)h_n}(r) - b_{(k-1)h_n}(0) + b_{(k-1)h_n}(r) \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^h b_{(k-1)h_n}(u) - b_{(k-1)h_n}(r) - b_{(k-1)h_n}(0) + b_{(k-1)h_n}(u) \end{aligned}$$

Pour tout $0 < \delta < b - a$, on a donc :

$$V(U_n; M_{a; b}; \delta) \leq \frac{2}{nh_n} V(M_n; M_{a; b}; \delta - a) + \frac{2}{nh_n} V(R_n; M_{a; b}; \delta - a) + 2K^2 (\delta - a)$$

D'après le lemme 4, il existe une constante C indépendante de n telle que, pour tout couple (r; u) ∈ [a; b]² vérifiant r + u ∈ [a; b], on a :

$$E M_n^2(r) \leq Cnh_n \text{ et } E (M_n(r+u) - M_n(r))^2 \leq Cnh_n u^2$$

Par application du lemme 7, on obtient : $\frac{2}{nh_n} E[V(M_n; M_{a,b}; b_j - a)] \leq C^0 \frac{M_{a,b}}{nh_n}$,

où C⁰ est indépendante de n. D'où : $\frac{2}{nh_n} V(M_n; M_{a,b}; b_j - a) \xrightarrow{L^1(P)} 0$.

De plus, le lemme 5 implique que : $\frac{2}{nh_n} V(R_n; M_{a,b}; b_j - a) \xrightarrow{L^1(P)} 0$.

Posons alors : $V_n(\cdot) = \frac{2}{nh_n} V(M_n; M_{a,b}; b_j - a) + \frac{2}{nh_n} V(R_n; M_{a,b}; b_j - a) + 2K^2 (b_j - a) \cdot$.

Compte tenu de ce qui précède, pour tout $\cdot \in [a; b]$, on a : $V_n(\cdot) \xrightarrow{L^1(P)} A(\cdot) = 2K^2 \cdot (b_j - a)$. □

5 Vitesse de convergence et normalité asymptotique

Énonçons le résultat de normalité asymptotique de b_n :

Théorème 2 Sous (A), si $(h_n)_n$ est telle que $nh_n \rightarrow 1$ et $nh_n^3 \rightarrow 0$, et pour $l(0)$ définie en (8), on a :

$$P_{nh_n b_n} \xrightarrow{L^1(P)} N(0; \frac{1}{l(0)})$$

Du fait de la non-regularité du contraste, ce résultat ne peut être obtenu par la méthode classique (résultat 3.3.4. de [4]), basée sur la dérivabilité à l'ordre 2 du contraste et qui consisterait à développer $U_n^0(b_n) - U_n^0(0)$. Ainsi, après avoir identifié la vitesse de convergence de b_n vers 0, nous développons le contraste autour de 0 en mettant en évidence une décomposition qui satisfait une propriété LAN (Local Asymptotic Normality, cf. [9]).

Comme le montre le théorème qui suit, l'identification de la vitesse de convergence de b_n vers 0 nécessite un premier renforcement de l'hypothèse de décroissance de la suite $(h_n)_n$ vers 0 : si nh_n^3 est bornée, la suite $nh_n b_n$ est alors tendue.

Théorème 3 Sous (A), si $(h_n)_n$ est telle que $nh_n \rightarrow 1$ et nh_n^3 est bornée, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $H_0 > 0$ et $n_{H_0} \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq n_{H_0}$:

$$P_{j b_j} \xrightarrow{H_0} P_{j b_j} \xrightarrow{H_0} \dots$$

La démonstration de ce résultat repose sur la transposition d'arguments développés par Chan [3] dans le cadre de modèles autorégressifs à seuil à temps discret.

Démonstration :

Pour tout $\epsilon \in]0; b[$, on a :

$$P_{\inf_{\substack{\epsilon \leq |r| \leq \frac{H}{nh_n}}} (U_n(r) - U_n(0)) > \epsilon} \leq P(|b_n| > \epsilon) + P(|b_n| < \frac{H}{nh_n})$$

Du fait de la consistance de b_n , pour tout $\phi \in]0; b[$ et tout $\epsilon > 0$, on sait qu'il existe $n_\phi \in \mathbb{N}$ tel que $8n \leq n_\phi$, $P(\|b_n\| > \phi) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Il nous suffit donc de trouver $\phi_0 > 0$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $H_0 > 0$ et $n_{H_0} \in \mathbb{N}$ qui satisfont pour $n \geq n_{H_0}$:

$$P\left(\inf_{\phi_0 \leq r \leq \frac{H_0}{nh_n}} (U_n(r) - U_n(0)) > \frac{\epsilon}{2}\right) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

On aura alors le résultat attendu en prenant $n_{H_0}^0 = \max\{n_{\phi_0}; n_{H_0}\}$.
 Dans le cas où $r > 0$, on a :

$$\begin{aligned} U_n(r) - U_n(0) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^3 (b_{(k-1)h_n}(0) - b_{(k-1)h_n}(r))^2 + \frac{2}{nh_n} (M_n(0) - M_n(r)) + \frac{2}{nh_n} R_n(r) \\ &\leq r^2 \inf_{\phi_0 \leq r \leq \frac{H_0}{nh_n}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^3 \frac{(b_{(k-1)h_n}(0) - b_{(k-1)h_n}(r))^2}{r} \\ &\quad + 2r^2 \sup_{\phi_0 \leq r \leq \frac{H_0}{nh_n}} \frac{1}{nh_n} \frac{|M_n(0) - M_n(r)|}{r^2} + 2r^2 \sup_{\phi_0 \leq r \leq \frac{H_0}{nh_n}} \frac{1}{nh_n} \frac{|R_n(r)|}{r^2} \end{aligned}$$

Or :

Lemme 8 Sous (A), si $(h_n)_n$ est telle que $nh_n \leq 1$ et $h_n \leq 0$, $\phi \in]0; b[$; $\epsilon > 0$; $8H > 0$ et $8\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que, $8n \leq n_0$:

$$P\left(\inf_{\phi_0 \leq r \leq \frac{H_0}{nh_n}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^3 \frac{(b_{(k-1)h_n}(0) - b_{(k-1)h_n}(r))^2}{r} \geq \hat{A}(\phi) + (2 + \phi) \epsilon\right) \leq \epsilon$$

avec $\hat{A}(\phi) = \inf_{2,1,0} \{4K^2q(\phi) + \phi G(\phi)\}$, où q et G sont des fonctions continues, croissantes, telles que $q(0) = 0$ et $G(0) < 1$.

La démonstration de ce résultat est donnée en annexe D.

De plus, on a les deux résultats suivants, démontrés en annexes E et F :

Lemme 9 Sous (A), si $(h_n)_n$ est telle que $nh_n \leq 1$ et $h_n \leq 0$, pour tout $\phi \in]0; b[$, $\epsilon > 0$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $H_1 > 0$ telle que pour $H \leq H_1$, $\exists n_H^1 \in \mathbb{N}$ tel que, $8n \leq n_H^1$:

$$P\left(\sup_{\phi_0 \leq r \leq \frac{H_0}{nh_n}} \frac{1}{nh_n} \frac{|M_n(0) - M_n(r)|}{r^2} > \frac{\epsilon}{2}\right) \leq \epsilon \quad (12)$$

Lemme 10 Sous (A), si $(h_n)_n$ est telle que nh_n^3 est bornée, pour $\phi \in]0; b[$, $\epsilon > 0$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $H_2 > 0$ telle que, $8H \leq H_2$, $\exists n_H^2 \in \mathbb{N}$ tel que, $8n \leq n_H^2$:

$$P\left(\sup_{\phi_0 \leq r \leq \frac{H_0}{nh_n}} \frac{1}{nh_n} \frac{|R_n(r)|}{r^2} > \frac{\epsilon}{2}\right) \leq \epsilon \quad (13)$$

On obtient donc que, pour tout $\Phi \in]0, b[$, tout $\epsilon > 0$ et tout $\delta > 0$, il existe $H_0 = \max\{H_1; H_2\} > 0$ et $n_{H_0} = \max\{n_0; n_{H_0}^1; n_{H_0}^2\}$ tels que, $\forall n \geq n_{H_0}$:

$$P \left(\left| \frac{\mu}{nh_n} - \Phi \right| \leq \delta; U_n(r) \leq U_n(0) \leq r^2 [\hat{A}(\Phi) + (6 + \Phi)^{-1}] + 1 + 3 \right) > 1 - \epsilon$$

La fonction $\Phi \mapsto \hat{A}(\Phi)$ est continue et décroissante avec $\hat{A}(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 j^2 \nu_{2,1,0} > 0$. Il existe donc $\Phi_0 > 0$ tel que $\hat{A}(\Phi_0) > 0$. On choisit alors $\delta = \frac{\hat{A}(\Phi_0)}{2(6 + \Phi_0)}$.

Le cas où $r \geq \Phi$; $\frac{\mu}{nh_n}$ se traite de manière analogue. \square

Notons que la condition imposée sur la vitesse de décroissance de $(h_n)_n$ vers 0 (lemme 10) résulte de la majoration $E \sum_{k=1}^{(k_i-1)h_n} \chi_{h_n}^2$ (cf. annexe C, (29), p.27) où $\chi_{h_n}^{(k_i-1)h_n}$ $k=1:n$ sont les erreurs définies au lemme 1.

Comme nous l'avons précisé, pour établir la normalité asymptotique de b_n , nous adoptons le type de critère développé par Ibragimov et Has'minskii dans [9]. Le théorème 1.2 de [9] établit la normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque la vraisemblance du modèle considéré satisfait une condition LAN (définition 2.1 [9]). Nous allons adapter ce résultat à notre cadre d'étude (théorème 4).

La suite $\frac{\mu}{nh_n} b_n$ étant bornée en probabilité, on définit :

$$Z_n(u) = nh_n \left(U_n \left(\frac{u}{nh_n} \right) - U_n(0) \right) \quad (14)$$

Théorème 4 Supposons que, pour tout u , on puisse écrire :

$$Z_n(u) = 2I(0)u\phi_n + I(0)u^2 + a_n(u) \quad (15)$$

où $I(0)$ est une constante strictement positive. Si de plus :

1. ϕ_n converge vers la loi normale centrée et de variance $\frac{1}{I(0)}$.
2. $u \mapsto a_n(u)$ est continue p.s. et telle que, pour tout $B > 0$, $\sup_{|u| \leq B} |a_n(u)|$ tend en probabilité vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Alors : $\frac{\mu}{nh_n} b_n + \phi_n \xrightarrow{P} 0$, $\frac{\mu}{nh_n} b_n \xrightarrow{L(P)} N \left(0; \frac{1}{I(0)} \right)$

La démonstration du théorème 4 est donnée en annexe G.

Pour montrer le théorème 2, il nous suffit donc d'exhiber une décomposition de Z_n de la forme (15) telle que les trois termes de ce développement, $I(0)$, ϕ_n et a_n , satisfont les hypothèses du théorème 4.

Commençons par identifier chacun des trois termes qui constituent ce développement. Nous utilisons pour cela une généralisation de la formule de Taylor dans le cas d'une fonction de $C_{f_0g}^2$.

Lemme 11 Si b est un élément de $C_{f_0g}^2$, on a pour tout x et tout r :

$$b(x) - b(x+r) = \int_0^1 b^{(i)}(x+u) du - \int_0^1 b^{(i)}(x+u+r) du$$

Ce résultat repose sur le même type d'arguments que ceux développés dans la démonstration du lemme 2 (annexe A-1).

Le premier terme de droite de cette égalité est la fonction b définie en (7) et nous noterons par la suite :

$$\alpha(r; x) = \int_0^x \int_0^v b^0(x-u) du dv + \int_0^x b^0(x-u) du \quad (16)$$

Par application du lemme 11, l'information de Fisher asymptotique (8), x 3), on a :

$$Z_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{nh_n} \alpha \left(\frac{u}{nh_n}; X_{(k-1)h_n} \right) + u^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} b^2(X_{(k-1)h_n}) + 2R_n \left(\frac{u}{nh_n} \right)$$

Posons :

$$D_n^{(j)} = \frac{D_n^{(j)}}{I(0)} \quad \text{ou} \quad D_j^{(n)} = \frac{1}{nh_n} \alpha \left(\frac{u}{nh_n}; X_{(k-1)h_n} \right) \quad ; (j = 1; n)$$

$$D_0^{(n)} = 0$$

$$a_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{nh_n} \alpha \left(\frac{u}{nh_n}; X_{(k-1)h_n} \right) + u^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} b^2(X_{(k-1)h_n}) + 2R_n \left(\frac{u}{nh_n} \right)$$

Il nous reste à montrer que, sous (A), les termes de cette décomposition (15) satisfont les deux conditions du théorème 4.

La loi asymptotique de D_n résulte directement du théorème suivant :

Théorème 5 Sous (A), lorsque $nh_n \rightarrow \infty$ et $h_n \rightarrow 0$, on a :

$$D_n^{(n)} \xrightarrow{L(P)} N(0; I(0))$$

Démonstration :

Sous (A), $D^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} D_k^{(n)}$ est une $F_{(k-1)h_n}$ -martingale de carré intégrable. La démonstration du théorème repose alors sur la vérification des deux hypothèses du théorème 2.8.43 de [4] (p.82).

On montre que $\langle D \rangle_n^{(n)} = \sum_{k=1}^n E [D_k^{(n)} | D_{k-1}^{(n)}]^2 \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0)$. En effet :

$$\begin{aligned} \langle D \rangle_n^{(n)} &= \frac{1}{nh_n} \sum_{k=1}^n E [D_k^{(n)} | D_{k-1}^{(n)}]^2 \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E [X_{k h_n} | E X_{k h_n} \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0)]^2 \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E [X_{k h_n}^2 | E X_{k h_n} \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0)] + C_n \end{aligned}$$

avec :

$$C_n = \frac{1}{nh_n} \sum_{k=1}^n E [X_{k h_n}^2 | E X_{k h_n} \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0)] - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E [X_{k h_n} | E X_{k h_n} \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0)]^2 \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0)$$

Or, le lemme 3 implique que : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E [X_{k h_n}^2 | E X_{k h_n} \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0)] \rightarrow 0$.

De plus, par une application de l'inégalité de Schwarz, on montre que : $E [C_n] \leq 2K^2 \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0) h_n$.

On a donc : $C_n \xrightarrow{L^1(P)} 0$. D'où : $\langle D \rangle_n^{(n)} \xrightarrow{L^1(P)} | (0)$. La première hypothèse du théorème 2.8.43 est donc vérifiée avec $\varphi(n) = n$.

Il nous faut maintenant montrer que la condition de Lindeberg est satisfaite. Pour tout $\epsilon > 0$, on obtient par application de l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} E \sum_{k=1}^n E [D_k^{(n)} | D_{k-1}^{(n)}]^2 \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0) &\leq E \sum_{k=1}^n E [D_k^{(n)} | D_{k-1}^{(n)}]^2 \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0) \\ &\leq \frac{1}{nh_n} \sum_{k=1}^n E [X_{k h_n}^2 | E X_{k h_n} \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0)] \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0) \\ &\leq \frac{1}{nh_n} \sum_{k=1}^n E [X_{k h_n}^2 | E X_{k h_n} \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0)] \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0) \end{aligned}$$

Or, d'après la propriété 1, il existe C telle que :

$$E [X_{k h_n}^2 | E X_{k h_n} \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0)] \leq C h_n$$

De plus, l'inégalité de Markov à l'ordre 1 et la propriété 1 impliquent que :

$$E \sum_{k=1}^n E [X_{k h_n}^2 | E X_{k h_n} \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0)] \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0) \leq K^2 \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0) \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0) \leq K^2 \frac{C}{n}$$

On en déduit donc qu'il existe une constante C^0 telle que pour tout n :

$$E \sum_{k=1}^n E [D_k^{(n)} | D_{k-1}^{(n)}]^2 \int F_{(k-1)h_n}^{L^1(P)} | (0) \leq \frac{C^0}{n^2}$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^2 E \left[D_k^{(n)} \right] + \sum_{k=1}^3 E \left[D_{k+1}^{(n)} \right] \leq \sum_{k=1}^3 \int F_{(k+1)h_n}^{L^1(P)} \leq 0$$

Puisque la condition de Lindeberg est vérifiée, on obtient bien la convergence en loi annoncée.

L'hypothèse 1 du théorème 4 est donc satisfaite car par définition $C_n = I(0) + D_n^{(n)}$.

La vérification de l'hypothèse 2 du théorème 4 repose entre autre sur l'obtention du résultat suivant : pour tout $B > 0$, $\sup_{|j| \leq B} |R_n| \leq \frac{u}{nh_n} \rightarrow 0$. Comme dans le théorème 3, c'est l'ordre de la majoration, $E \left[\sum_{k=1}^3 D_{k+1}^{(n)} \right] \leq Ch_n^2$, qui va imposer une vitesse de décroissance de (h_n) vers 0. On a ainsi un nouveau renforcement de l'hypothèse $nh_n^3 \rightarrow 0$.

Théorème 6 Sous (A), si $nh_n \rightarrow 1$ et $nh_n^3 \rightarrow 0$, on a pour tout $B > 0$:

$$\sup_{|j| \leq B} |j^a n(u)| \xrightarrow{L^1(P)} 0$$

Notons que la propriété satisfaite par la fonction $j^a n$ est plus forte que celle requise pour obtenir le caractère LAN du contraste en 0.

Démonstration :

On a :

$$\sup_{|j| \leq B} |j^a n(u)| \leq 2 \sup_{|j| \leq B} \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\mu}{nh_n} \int X_{(k+1)h_n} \right| \leq \sum_{k=1}^3 \int F_{(k+1)h_n}^{L^1(P)} \quad (17)$$

$$+ 2 \sup_{|j| \leq B} |R_n| \leq \frac{u}{nh_n} \quad (18)$$

$$+ B^2 \sum_{k=1}^3 \frac{1}{n} \int X_{(k+1)h_n}^2 \leq I(0) \quad (19)$$

$$+ h_n \sum_{k=1}^3 \sup_{|j| \leq B} \left| \frac{\mu}{nh_n} \int X_{(k+1)h_n} \right|^2 \quad (20)$$

$$+ 2B \sum_{k=1}^3 \frac{h_n}{n} \int X_{(k+1)h_n}^3 \leq 2B \sup_{|j| \leq B} \left| \frac{\mu}{nh_n} \int X_{(k+1)h_n} \right| \quad (21)$$

Montrons que chacun de ces cinq termes, (17) à (21), tend vers 0 au sens L^1 sous P. Pour cela, nous utiliserons la propriété suivante :

Propriété 3 Sous (A), pour tout $B > 0$, il existe $C_B > 0$ (qui ne dépend que de B) telle que, pour $|j| \leq B$; $|v| \leq B$, et pour n tel que $nh_n \rightarrow 1$, on a :

$$E \left| \frac{\mu}{nh_n} \int X_{(k+1)h_n} \right| \leq C_B \left| \frac{v}{nh_n} \int X_{(k+1)h_n} \right| + \frac{1}{(nh_n)^2} \quad (22)$$

$$E \sup_{|j| \leq B} \left| \frac{\mu}{nh_n} \int X_{(k+1)h_n} \right|^2 \leq C_B \frac{1}{nh_n} \int X_{(k+1)h_n}^2 + \frac{1}{nh_n} \quad (23)$$

où Q est une application continue telle que $Q(0) = 0$.

Ce résultat repose sur la majoration suivante; pour tout x , si $|j| \leq B$, $|v| \leq B$ et $nh_n \geq 1$, on a :

$$\left| \frac{\mu_u}{nh_n}; x \right| \leq \left| \frac{\mu_v}{nh_n}; x \right| + b^0 |0^+| + b^0 |0^-| \left| \frac{v - u}{nh_n} \right| + BG_B(x) \left| \frac{v - u}{nh_n} \right|$$

avec $G_B(x) = C(1 + |x| + B)^3$

Terme (17) : Posons : $\alpha_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_u}{nh_n}; X_{(k-1)h_n} X_{kh_n} - E X_{kh_n} F_{(k-1)h_n}$. Soit n tel que $nh_n \geq 1$. Appliquant l'inégalité de Schwarz et utilisant les propriétés 1 et 3-(22), on montre que, pour tout $B > 0$, il existe C_B telle que si $|j| \leq B$ et $|v| \leq B$:

$$E (\alpha_n(u) - \alpha_n(v))^2 \leq C_B Q \left(\frac{B}{nh_n} \right) + \frac{1}{(nh_n)^2} (v - u)^2$$

et :

$$E \alpha_n^2(u) = E (\alpha_n(u) - \alpha_n(0))^2 \leq BC_B Q \left(\frac{B}{nh_n} \right) + \frac{1}{(nh_n)^2}$$

De plus, α_n est un processus continu car, pour tout x , $u \mapsto \alpha(u; x)$ est continue. On peut donc appliquer le lemme 7. Si $nh_n \geq 1$ et $(h_n)_n$ est bornée, on obtient :

$$E \sup_{|j| \leq B} |\alpha_n(u)| \leq E [V(\alpha_n; B; 2B)] \leq K_B Q \left(\frac{B}{nh_n} \right) + \frac{1}{(nh_n)^2}$$

avec $Q \left(\frac{B}{nh_n} \right) + \frac{1}{(nh_n)^2}$ qui tend vers 0, lorsque $nh_n \rightarrow \infty$. On a donc, pour tout $B > 0$,

$\sup_{|j| \leq B} |\alpha_n(u)| \xrightarrow{L^1(P)} 0$, lorsque $nh_n \rightarrow \infty$ et $(h_n)_n$ est bornée.

Terme (18) : Utilisant la propriété de Lipschitz de b et la propriété 2, il existe une constante C_B telle que pour tout n , $nh_n \geq 1$:

$$E \sup_{|j| \leq B} |R_n| \leq C_B \frac{1}{nh_n^3}$$

Si $nh_n \rightarrow \infty$ et $nh_n^3 \rightarrow 0$, on obtient donc :

$$\sup_{|j| \leq B} |R_n| \xrightarrow{L^1(P)} 0$$

Terme (19) : Par application du lemme 3 : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b^2 X_{(k-1)h_n}^2 \xrightarrow{L^1(P)} 0$.

Terme (20) : Pour montrer la convergence L^1 vers 0 de la variable considérée, il suffit d'utiliser la propriété 3-(23).

Terme (21) : En n , par application de l'inégalité de Schwarz et de la propriété 3-(23), il existe C_B telle que :

$$E \frac{2s}{n} \sum_{k=1}^n X_{(k-1)h_n}^3 \leq \sup_{|j| \leq B} \left| \frac{\mu_u}{nh_n}; X_{(k-1)h_n} \right| \leq C_B K Q \left(\frac{B}{nh_n} \right) + \frac{1}{nh_n^2}$$

On a donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{(k-1)h_n}^3 - \sup_{j \in B} \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h_n}^3 \xrightarrow{L^1(P)} 0$$

Chacun des cinq termes, (17) à (21), converge vers 0 au sens L^1 sous P ; le théorème 6 est donc démontré. \square

Nous avons donc trouvé une décomposition de Z_n du type (15) telle que, sous (A), les conditions du théorème 4 sont satisfaites sous la condition $nh_n \rightarrow 1$ et $nh_n^3 \rightarrow 0$. Le théorème 2 est ainsi démontré.

Notons que, dans [14], le problème d'estimation du paramètre de seuil est également traité pour un modèle autorégressif discret du type :

$$X_k = b(X_{k-1} | r_0) + e_k$$

où la fonction d'autorégression b est dans $C_{r_0}^2$. Les techniques utilisées dans le cas des diffusions à seuil sont alors adaptées pour étudier les propriétés asymptotiques de l'estimateur des Moindres Carrés Conditionnels de r_0 .

6 Applications : Modèle CTAR(1)

Dans ce paragraphe, nous allons spécifier les résultats précédents pour un modèle CTAR(1) ([1], [2], [8]) à raccordement continu défini par :

$$dX_t = [a_1 X_t I_{(X_t > 0)} + a_2 X_t I_{(X_t \leq 0)}] dt + dB_t \quad (24)$$

Dans ce cas, le paramètre de seuil est $r_0 = 0$. Commençons par examiner les conditions (A). (A 1) est aisément vérifiée.

La dérivée de la fonction d'échelle associée à (24) est donnée par :

$$s_0(x) = \exp(-a_1 x^2) I_{(x > 0)} + \exp(-a_2 x^2) I_{(x \leq 0)}$$

(A 2) est ainsi satisfaite si et seulement si $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$. La densité de la loi invariante q_0 est :

$$q_0(x) = \frac{\Gamma(\frac{a_1}{2}) \Gamma(\frac{a_2}{2})}{\Gamma(\frac{a_1+a_2}{2})} \frac{1}{\sqrt{a_1}} \exp(-a_1 x^2) I_{(x > 0)} + \frac{\Gamma(\frac{a_1}{2}) \Gamma(\frac{a_2}{2})}{\Gamma(\frac{a_1+a_2}{2})} \frac{1}{\sqrt{a_2}} \exp(-a_2 x^2) I_{(x \leq 0)}$$

On vérifie facilement que $I(0) = \frac{\Gamma(\frac{a_1}{2}) \Gamma(\frac{a_2}{2})}{\Gamma(\frac{a_1+a_2}{2})}$ et que $I(0) > 0$ pour $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$.

D'après la remarque 1 faite au § 3, (A4) est satisfaite si $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$. On a en outre :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} q_0(x) = 0; \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{2b(x)} = 0$$

Etude expérimentale par simulation :

Nous prendrons comme domaine de recherche de r_0 , l'intervalle $[a; b]$ avec $a = 4$ et $b = 5$. Pour simuler le point initial X_0 selon la loi q_0 (A 3), on se base sur la propriété suivante :

Propriété 4 Soient U une v.a. uniforme sur $[0; 1]$ et X une v.a. gaussienne centrée et réduite. On suppose que U et X sont indépendantes. Posons :

$$Y = \frac{1}{2a_1} |X|^3 \mathbb{1}_{U \leq \frac{p_{a_2}}{p_{a_1} + p_{a_2}}} + \frac{1}{2a_2} |X|^3 \mathbb{1}_{U > \frac{p_{a_2}}{p_{a_1} + p_{a_2}}}$$

Alors, la v.a. Z définie par $Z = Y |X|$ suit la loi \mathcal{L}_0 .

Pour $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $r_0 = 0$, nous simulons n observations à partir d'un schéma d'Euler à pas $\frac{h_n}{100}$. Comme le résultat de normalité asymptotique de b_n est obtenu pour une suite (h_n) telle que $nh_n^3 \rightarrow 0$, nous avons choisi $h_n = (n \ln(\ln(n)))^{-\frac{1}{3}}$. On a alors pour $n = 5000$, $h_n \approx 0.04536$ et $T = nh_n \approx 226.83$.

Cette étude numérique est menée en supposant dans un premier temps les paramètres a_1 et a_2 connus. Nous calculons $N = 100$ estimations indépendantes du paramètre de seuil. Nous notons $\bar{r}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b_i$ la moyenne empirique et $S_N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (b_i - \bar{r}_N)^2$ la variance empirique des estimations. \bar{r}_N est à comparer à $r_0 = 0$ et $TS_N \approx \frac{1}{T(0)} = \frac{1+p_2}{34+p_2} \approx 0.4459$.

Nous complétons cette étude numérique en testant la normalité $N(0; \frac{1}{T(0)})$ de la loi limite des \bar{r}_N par un test du Khi-Deux. Pour ce faire, on choisit 20 classes $C_i =]b_{i-1}; b_i]$, avec $b_0 = -1$ et $b_{20} = +1$, sur lesquelles la loi $N(0; \frac{1}{T(0)})$ a une probabilité $p_i \approx 0.05$. Pour tout $i = 1; 20$, on note $N_i = \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{(b_{i-1}, b_i]}(\frac{P_{nh_n}^{(2)}(b_{i-1}, b_i)})$ l'effectif observé pour la classe C_i , l'effectif théorique étant Np_i . On définit alors $K_N = \sum_{i=1}^N \frac{(N_i - Np_i)^2}{Np_i}$. Si la loi limite est la loi $N(0; \frac{1}{T(0)})$, la loi de K_N est un Khi-Deux à 19 degrés de liberté. La zone de rejet choisie pour un risque de première espèce de 5% est $fK_N > 30.1g$.

Dans un deuxième temps, nous nous placerons dans le cas où a_1 et a_2 sont également des paramètres à estimer. Pour $r \in \mathbb{R}$ tel que $\min_{k=1;n} X_{(k-1)h_n} < r < \max_{k=1;n} X_{(k-1)h_n}$, les estimateurs du minimum de contraste de a_1 et a_2 associés à U_n sont :

$$a_{1n}(r) = \frac{1}{h_n} \frac{\sum_{k=1}^n r_i X_{(k-1)h_n} X_{kh_n} \mathbb{1}_{(X_{(k-1)h_n} > r)}}{\sum_{k=1}^n r_i X_{(k-1)h_n}^2 \mathbb{1}_{(X_{(k-1)h_n} > r)}}$$

$$a_{2n}(r) = \frac{1}{h_n} \frac{\sum_{k=1}^n r_i X_{(k-1)h_n} X_{kh_n} \mathbb{1}_{(X_{(k-1)h_n} < r)}}{\sum_{k=1}^n r_i X_{(k-1)h_n}^2 \mathbb{1}_{(X_{(k-1)h_n} < r)}}$$

On remplace alors dans le contraste a_1 et a_2 par leur r -estimation et on minimise en r la fonction ainsi construite. L'estimation b_n étant obtenue, on estime a_1 et a_2 par $a_{1n}(b_n)$ et $a_{2n}(b_n)$. Nous indiquerons par \hat{a} les résultats obtenus relativement à cette procédure d'estimation.

Figure 1: Histogramme des estimateurs $(nh_n)^{\frac{1}{2}}(\hat{b}_n^a - r_0)$ lorsque $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$ sont supposés connus.

Figure 2: Histogramme des estimateurs $(nh_n)^{\frac{1}{2}}(\hat{b}_n^a - r_0)$ lorsque $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$ sont estimés.

Figure 3: Histogramme des estimateurs $(nh_n)^{\frac{1}{2}}(\hat{b}_{1n} - a_1)$ lorsque $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

r_0	r_N	$I(0)^{i-1}$	TS_N
0	0.001974	0.4459	0.397615

Table 1: Moyenne et variance empiriques du paramètre de seuil pour $N = 100$ lorsque $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$ sont connus.

a_N^1	a_N^2	r_N^a	TS_N^a
1.016415	1.969189	0.004132	1.689259

Table 2: Moyennes empiriques des estimateurs de a_1 , a_2 et r_0 pour $N = 100$ et $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $r_0 = 0$.

Conclusion :

Que a_1 et a_2 soient estimés ou non, les moyennes empiriques pour le paramètre de seuil approchent r_0 avec une précision de l'ordre de 10^{-3} . Alors que la variance empirique est proche de la variance théorique si a_1 et a_2 sont connus, elle s'en éloigne naturellement lorsque a_1 et a_2 doivent être estimés, et cela bien que ces estimations soient en moyenne proches à 10^{-2} près des vraies valeurs des paramètres a_1 et a_2 . Lorsque $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$ sont connus, le test du Khi-Deux nous permet de confirmer, au niveau 5%, que la loi limite commune des $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i$ est la loi $N(0; \frac{1}{I(0)})$. On trouve en effet $K_N = 22.59$.

Pour ce modèle à seuil particulier, lorsque a_1 et a_2 ne sont pas estimés, les résultats numériques sont conformes aux résultats théoriques énoncés aux x 4 et x 5.

Si on se réfère à [3], on peut conjecturer que l'estimateur du minimum de contraste $(\hat{a}_n; \hat{a}_{2n}; \hat{b}_n)$ associé à $(a_1; a_2; r_0)$ est tel que $(\hat{a}_n; \hat{a}_{2n})$ est asymptotiquement normal avec une vitesse standard et indépendant de \hat{b}_n , la loi asymptotique de \hat{b}_n n'étant pas affectée par l'estimation de $(a_1; a_2)$.

Figure 4: Histogramme des estimateurs $(nh_n)^{\frac{1}{2}}(\hat{b}_n - b_n)$ lorsque $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

7 Comparaison de l'estimateur du maximum de vraisemblance et de l'estimateur du minimum de contraste

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que l'estimateur du minimum de contraste est asymptotiquement équivalent à l'estimateur du maximum de vraisemblance basé sur une observation continue $(X_t)_{t \in [0; T]}$ du processus solution.

La log-vraisemblance continue est donnée par :

$$L_T(r) = \ln \frac{P_r^T}{P_0^T}(X) = \int_0^T [b(X_t; r) - b(X_t)] dX_t - \frac{1}{2} \int_0^T b^2(X_t; r) - b^2(X_t) dt$$

Un estimateur du maximum de vraisemblance est défini comme une solution \hat{b}_T de l'équation :

$$\hat{b}_T = \arg \max_{r \in [a; b]} L_T(r)$$

Dans le cadre général d'une diffusion ergodique, de dérive dérivable par rapport au paramètre en tout point $r \in [a; b]$ dans $L^2(\mathbb{R})$, Kutoyants prouve que P_r^T est LAN en r sur tout $[a; b]$ avec la fonction de normalisation $\phi_T(r) = \frac{1}{T I(r)}$ (définition 1.2.1 et théorème 3.3.8, [12]). Sous des conditions supplémentaires, l'estimateur du maximum de vraisemblance est consistant, asymptotiquement normal à la vitesse \sqrt{T} et asymptotiquement efficace au sens des estimateurs asymptotiquement minimax selon Hajek (théorème 3.4.4, [12]).

L'hypothèse de translation faite sur le modèle et (A) permettent de varier l'ensemble des conditions d'application de ces deux résultats. Pour $r = 0$, on a en particulier :

$$\sqrt{T}(\hat{b}_T - 0) \xrightarrow{L(P)} N\left(0, \frac{1}{I(0)}\right) \quad \text{avec} \quad \phi_T(u) = \frac{1}{T I(0)} \int_0^T [b(X_t) - b(X_t)] dX_t + \int_0^T [b^2(X_t) - b^2(X_t)] dt$$

avec, lorsque $T \rightarrow +\infty$:

$$\phi_T = \frac{1}{T I(0)} \int_0^T b(X_t) [dX_t - b(X_t) dt] \xrightarrow{L(P)} N\left(0, \frac{1}{I(0)}\right)$$

$$\text{avec} \quad a_T(u) \xrightarrow{P} 0$$

On a de plus :

$$\sqrt{T}(\hat{b}_T - 0) \xrightarrow{L(P)} N\left(0, \frac{1}{I(0)}\right)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \limsup_{j \rightarrow \infty} E_T(\hat{b}_T - r)^2 = \frac{1}{I(0)} \quad (25)$$

La relation (25) prouve l'efficacité asymptotique de \hat{b}_T au sens de Hajek. Cette égalité implique en particulier que $T \rightarrow +\infty$ [6] :

$$\sqrt{T}(\hat{b}_T - 0) \xrightarrow{P} 0 \quad (26)$$

Ce résultat va nous permettre de montrer que \hat{b}_T et \hat{b}_n sont asymptotiquement équivalents :

Theorem 7 Sous (A), lorsque $T = nh_n! + 1$ et $nh_n^3! 0$, on a :

$$P_T(b_T i b_n) i! 0$$

En effet :

$$P_T(b_T i b_n) = P_T b_T + C_T + (C_n i C_T) i P_{nh_n b_n + C_n}$$

avec (26) et le resultat du theoreme 4 :

$$\text{si } nh_n! + 1 \text{ et } nh_n^3! 0; P_{nh_n b_n + C_n} i! 0$$

Pour completer la demonstration du theoreme 7, il suffit donc d'etablir que :

Lemme 12 Sous (A), lorsque $T = nh_n! + 1$ et $h_n! 0$, on a :

$$C_n i C_T i! 0$$

Demonstration :

$$C_T i C_n = \frac{1}{T! (0)} \sum_{k=1}^T \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b(X_t) i b(X_{(k-1)h_n}) i dB_t$$

$$i \frac{1}{nh_n! (0)} \sum_{k=1}^T \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b(X_t) i E b(X_t) j F_{(k-1)h_n} dt$$

1. Nous commencerons par montrer que :

$$S_n = \frac{1}{T! (0)} \sum_{k=1}^T \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b(X_t) i b(X_{(k-1)h_n}) i dB_t \stackrel{L^2(P)}{=} 0$$

On a :

$$b(y) i b(x) = \int_{\min(x,y)}^{\max(y,x)} b''(u) du i b''(0^+) i b''(0^-) i I_{R_i^+}(x) I_{R_i^+}(y) + I_{R_i^-}(y) I_{R_i^+}(x)$$

Sous (A 1), on obtient la majoration suivante :

$$|b(y) i b(x)| \leq C(1 + |x| + |y|)^{\alpha} + b''(0^+) i b''(0^-) i I_{R_i^+}(x) I_{R_i^+}(y) + I_{R_i^-}(y) I_{R_i^+}(x)$$

On en deduit donc que :

$$E S_n^2 \leq \frac{n}{nh_n! (0)^2} C^2 \int_0^{h_n} E (1 + |X_{tj} + |X_{0j}|)^{2\alpha} |X_{tj} - X_{0j}|^2 dt$$

$$+ \frac{2|b''(0^+) i b''(0^-)| j^2}{I(0)^2} P \sup_{|tj - h_n|} |X_{tj} - X_{0j}| > 0$$

Par l'inegalite de Schwarz, on a :

$$E (1 + |X_{tj} + |X_{0j}|)^{2\alpha} |X_{tj} - X_{0j}|^2 \leq E (1 + |X_{tj} + |X_{0j}|)^{4\alpha} \stackrel{i}{=} E |X_{tj} - X_{0j}|^2 \stackrel{h}{=} E |X_{tj} - X_{0j}|^2 \stackrel{i}{=} E |X_{tj} - X_{0j}|^2$$

Utilisant le résultat du problème 3.15 de [10] (p.306), sous (A 1) et ρ_0 admettant des moments de tous ordres, il existe une constante M telle que :

$$E \left[\sum_{j=0}^h (1 + jX_{tj} + jX_{0j})^4 \right] \leq M; \quad E \left[\sum_{j=0}^h jX_{tj} + jX_{0j} \right] \leq Mt$$

D'où :

$$E \left[S_n^2 \right] \leq \frac{2C^2 M \rho_{h_n}}{3! (0)^3} + \frac{2j b^0(0^+) \rho_{h_n} + b^0(0^+) j^2}{I(0)^2} P \left(\sup_{j \leq h_n} jX_{tj} + jX_{0j} > 0 \right)$$

Par continuité de $t \rightarrow X_t$, on montre que : $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sup_{j \leq h_n} jX_{tj} + jX_{0j} > 0 \right) = 0$. On a donc le résultat annoncé.

2. Nous allons montrer que :

$$T_n = \frac{1}{nh_n I(0)} \sum_{k=1}^K X_{(k-1)h_n}^{(3)} - \sum_{k=1}^K X_{(k-1)h_n}^{(2)} b(X_{(k-1)h_n}) \leq E \left[\sum_{k=1}^K X_{(k-1)h_n}^{(2)} b(X_{(k-1)h_n}) \right] \leq L^1(P) 0$$

Utilisant la remarque 2 (x3), on a :

$$E \left[|T_n| \right] \leq \frac{K}{nh_n I(0)} \sum_{k=1}^K E \left[X_{(k-1)h_n}^{(2)} b(X_{(k-1)h_n}) \right] \leq \frac{2K \rho_{h_n}}{I(0)} \sum_{j=1}^h j b_j \rho_{1;1^0}$$

On obtient la convergence annoncée.

Φ_T et Φ_n converge en probabilité vers 0 puisqu'elle se décompose comme la différence de deux variables qui convergent en probabilité vers 0. \square

References

- [1] Brockwell, P. J. & Hyndman, R. J. (1992) On continuous-time threshold autoregression.- International Journal of Forecasting 8, North-Holland, 157-173.
- [2] Brockwell, P. J., Hyndman, R. J. & G. K. Grunwald (1991) Continuous time threshold autoregressive models.- Statistica Sinica, Vol. 1, No. 2, 401-410.
- [3] Chan, K. S. (1993) Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a threshold autoregressive model.- The Annals of Statistics, Vol. 21, No. 1, 520-533.
- [4] Dacunha-Castelle, D. & Du°o, M. (1993) Probabilités et Statistiques : Problèmes à temps mobile.- 2^{ème} Ed., Masson.
- [5] Florens-Zmirou, D. (1989) Approximate discrete time schemes for statistics of diffusion processes.- Statistics 20, 547-557.
- [6] Hajek, J. (1972) Local asymptotic minimax and admissibility in estimation.- Proc. 6th Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. 1, Univ. of Calif. Press, 175-194.

- [7] Hansen, L. P. & Scheinkman, J.A. (1995) Back to the future : generating moment implications for continuous-time markov processes.- *Econometrica*, Vol. 63, No. 4, 767-804.
- [8] Hyndman, R. J. (1992) Continuous time threshold autoregressive models.- PhD thesis, University of Melbourne, Department of statistics.
- [9] Ibragimov, I. A. & Has'minskii, R. Z. (1981) Statistical Estimation- Asymptotic Theory.- Springer-Verlag.
- [10] Karatzas, I. & Shreve, S.E. (1996) Brownian Motion and Stochastic Calculus.- 2nd Ed., Springer.
- [11] Kessler, M. (1997) Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations.- *Scand. J. Stat.* 24 (2), 211-229.
- [12] Kutoyants, A. Y. (1984) Parameter estimation for stochastic processes.- *Research and Exposition in math.* 6, Heldermann Verlag, Berlin.
- [13] Souchet, S. (1998) Schéma de discrétisation anticipatif et estimation du paramètre de dérive d'une diffusion.- *Note au CRAS*, 327, série 1, 897-900.
- [14] Souchet, S. (1999) Estimation des paramètres d'une diffusion ergodique observée à temps discret.- *Thèse de doctorat de l'Université Paris I.*

A Démonstration du lemme 2

Dans la suite, on note : $S_h(a) = h(a^+) - h(a^-)$

1. Montrons que si $f \in C_{\text{lag}}^2$, f est la différence de deux fonctions convexes.

Soit $x < a$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on définit $G(y) = \int_x^y f''(u) du$.

Intégrant par parties, on obtient :

$$\forall t > 0; G(a+t) = f'(a+t) - f'(x) - S_{f''}(a)$$

De plus :

$$G(a-t) = f'(a-t) - f'(x)$$

On a donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}; G(y) = f'(y) - f'(x) - S_{f''}(a) \mathbb{1}_{(a < y)} \quad (27)$$

D'où :

$$\forall z \in \mathbb{R}; \int_x^z G(y) dy = f(z) - f(x) - f'(x)(z-x) - S_{f''}(a)(z-a)^+$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) - f_2(z) \\ f_1(z) &= f(x) + f'(x)(z-x) + \int_{f''(a)^+}^{f''(a)^+} (z-a)^+ + \int_x^z \int_x^y f''(u)^+ du dy \\ f_2(z) &= \int_{f''(a)^-}^{f''(a)^-} (z-a)^+ + \int_x^z \int_x^y f''(u)^- du dy \end{aligned}$$

f_1 et f_2 étant des fonctions convexes, on a le résultat annoncé.

2. Pour achever la démonstration du lemme 2, on applique le changement de variable généralisé à f_1 et f_2 (théorème 7.1 [10], p.218). On obtient :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \int_{\mathbb{R}} L_t(x) \circ(dx)$$

où \circ est la mesure définie par $\circ([u;v]) = f'(v) - f'(u)$. Or, d'après l'équation (27), on a pour $u < v$:

$$f'(v) - f'(u) = S_{f''}(a) \mathbb{1}_{[u;v]} + \int_u^v f''(t) dt$$

On obtient ainsi :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \int_{\mathbb{R}} L_t(x) f''(x) dx + S_{f''}(a) L_t(a)$$

avec : $\int_{\mathbb{R}} L_t(x) f''(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) ds < M >_s$ ([10], p.218).

On a donc le développement annoncé. \square

B Démonstration de la propriété 1

Soient k et n quelconques. On a :

$$E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} |j(X_s)|^2 ds = C_{kh_n} B + \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b_s(0) E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} |j(X_s)|^2 ds$$

Or, pour tous réels x et y , $(x+y)^4 \leq 8(x^4 + y^4)$. Donc :

$$E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} |j(X_s)|^4 ds \leq 8 \left(C_{kh_n} B \right)^2 + \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b_s(0) E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} |j(X_s)|^4 ds$$

Par une double application de l'inégalité de Schwarz, on obtient :

$$\int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b_s(0) E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} |j(X_s)|^4 ds \leq h_n^3 \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b_s(0) E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} |j(X_s)|^4 ds + 8h_n^3 \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b_s^4(0) E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} |j(X_s)|^2 ds$$

En passant à l'espérance sous la loi invariante π_0 , on a :

$$E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b_s(0) E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} |j(X_s)|^4 ds \leq 16h_n^4 \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b_s^4(0) \pi_0(ds) \quad (28)$$

De plus :

$$E \left(C_{kh_n} B \right)^2 = 3h_n^2$$

Si $(h_n)_n$ est bornée, il existe une constante C telle que :

$$E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} |j(X_s)|^4 ds \leq Ch_n^2$$

On a le résultat annoncé. \square

C Démonstration de la propriété 2

D'après le lemme 1, on a :

$$\int_{(k-1)h_n}^{kh_n} (kh_n - s) j(X_s) ds + h_n \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b_s(0) E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} |j(X_s)|^2 ds$$

car $s \mapsto L_s(0)$ est un processus croissant. D'où :

$$E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} (kh_n - s) E[j(X_s)] ds + h_n \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} b_s(0) E \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} |j(X_s)|^2 ds$$

Compte tenu du fait que μ_0 est la loi invariante, qu'elle admet des moments de tous ordres et que h est à croissance polynomiale, on a :

$$\int_{(k-1)h_n}^{kh_n} (kh_n - s) E[jh(X_s)] ds = \frac{j_1 h_1}{2} h_n^2$$

De plus, d'après la formule de Tanaka-Meyer ([10], p.220), on a :

$$jX_{t+s} = jX_t + \int_t^{t+s} \text{sign}(X_u) dB_u + \int_t^{t+s} \text{sign}(X_u) b(X_u) du + L_{t+s}(0) - L_t(0)$$

On obtient donc en passant à l'espérance sous la loi invariante :

$$E[L_{kh_n}(0) - L_{(k-1)h_n}(0)] = \int_{(k-1)h_n}^{kh_n} E[\text{sign}(X_u) b(X_u)] du = \frac{j_1 h_1}{2} h_n$$

De ce qui précède, on déduit que :

$$E[L_{(k-1)h_n}^2] \leq C h_n^2 \quad (29)$$

où C est une constante finie indépendante de n . Pour conclure, il suffit de constater que d'après le lemme 1, on a pour tout k :

$$E[X_{kh_n}^2] = E[X_{(k-1)h_n}^2] + h_n b_{(k-1)h_n}(0) = E[X_{(k-1)h_n}^2] + \frac{j_1 h_1}{2} h_n$$

Or :

$$E[X_{(k-1)h_n}^2] = E[X_{(k-1)h_n}^2] + \frac{j_1 h_1}{2} h_n$$

Donc :

$$E[X_{kh_n}^2] = E[X_{(k-1)h_n}^2] + \frac{j_1 h_1}{2} h_n$$

□

D Démonstration du lemme 8

D'après le lemme 11, on a pour $\phi, r > 0$ et tout x :

$$b(x) - b(x-r) = r b'(x) + \frac{r^2}{2} b''(x) + \frac{r^3}{6} b'''(x) + \dots + \frac{r^{\phi}}{\phi!} b^{(\phi)}(x) + \int_0^r \frac{r-t}{\phi!} b^{(\phi)}(x-ts) ds$$

On a donc :

$$(b(x) - b(x-r))^2 \leq r^2 b'(x)^2 + 2r^2 b'(x) b''(x) + r^2 b''(x)^2 + \dots + \int_0^r \int_0^r b^{(\phi)}(x-ts) b^{(\phi)}(x-t's) ds dt$$

Par hypothèse, $b^{(\phi)}$ est à croissance polynomiale, il existe donc $\alpha > 0$ et C finie telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^r \int_0^r b^{(\phi)}(x-ts) b^{(\phi)}(x-t's) ds dt \leq C (1 + |x| + |r|)^\alpha$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|b^0(x)| \leq K$. D'où, pour $H > 0$ et $n \geq n_H^\Phi = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{H}{nh_n} \Phi^0$:

$$\inf_{\Phi, r \geq \frac{H}{nh_n}} \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{|b(x_i) - b(x_i + r)|^2}{r} dx_i}{\int_{\mathbb{R}} |b^0(x_i)|^2 dx_i} \leq g_1^\Phi(x) + \Phi g_2^\Phi(x)$$

avec :

$$g_1^\Phi(x) = 4K^2 I_{(0, x + \Phi)}$$

et

$$g_2^\Phi(x) = 4KC(1 + |x| + |\Phi|)^2$$

On a donc, si $H > 0$ et $n \geq n_H^\Phi$:

$$\inf_{\Phi, r \geq \frac{H}{nh_n}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{|b_{(k-1)h_n}(0) - b_{(k-1)h_n}(r)|^2}{r} dx}{\int_{\mathbb{R}} |b^0(x)|^2 dx} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} |b^0(x)|^2 dx \leq G_n^1(\Phi) + \Phi G_n^2(\Phi)$$

où : $G_n^i(\Phi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} |g_i^\Phi(x)|^2 dx$ ($i=1,2$).

Sous (A), $(b^0)^2$, g_1^Φ et g_2^Φ sont dans $L^2(\mathbb{R})$. On peut alors définir $G_i(\Phi) = \int_{\mathbb{R}} |g_i^\Phi(x)|^2 dx$ ($i=1,2$) et appliquer le lemme 3 à chacune de ces variables. Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\delta > 0$, il existe n_0 tel que $8n \geq n_0$:

$$\mathbb{P} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} |b^0(x)|^2 dx \geq 1 + \frac{\epsilon}{3} \right] \leq \delta$$

$$\mathbb{P} \left[\int_{\mathbb{R}} |G_n^i(\Phi) - G_i(\Phi)|^2 dx \geq 1 + \frac{\epsilon}{3} \right] \leq \delta$$

On a donc :

$$\mathbb{P} \left[\int_{\mathbb{R}} |G_n^i(\Phi) - G_i(\Phi)|^2 dx \geq 1 + \frac{\epsilon}{3} \right] \leq \delta$$

Or :

$$\inf_{\Phi, r \geq \frac{H}{nh_n}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{|b_{(k-1)h_n}(0) - b_{(k-1)h_n}(r)|^2}{r} dx}{\int_{\mathbb{R}} |b^0(x)|^2 dx} \leq \int_{\mathbb{R}} |b^0(x)|^2 dx + G_1(\Phi) + \Phi G_2(\Phi)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |b^0(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |G_n^1(\Phi) - G_1(\Phi)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |G_n^2(\Phi) - G_2(\Phi)|^2 dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |b^0(x)|^2 dx + 4K^2 q(\Phi) + \Phi G_2(\Phi)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |b^0(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |G_n^1(\Phi) - G_1(\Phi)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |G_n^2(\Phi) - G_2(\Phi)|^2 dx$$

avec : $q(\Phi) = \int_{\mathbb{R}} |g_1^\Phi(x)|^2 dx$. Donc pour $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ et $H > 0$, il existe $n_1 = \max\{n_0, n_H^\Phi\}$ tel que $8n \geq n_1$:

$$\mathbb{P} \left[\int_{\mathbb{R}} |G_n^i(\Phi) - G_i(\Phi)|^2 dx \geq 1 + \frac{\epsilon}{3} \right] \leq \delta$$

avec $\hat{A}(\Phi) = \text{jjb}^0 \text{jj}_{2,1,0}^2 i 4K^2 q(\Phi) i \Phi G(\Phi)$, $G = G_2$.

E Démonstration du lemme 9

La démonstration de (12) s'inspire de la démarche développée par Chan [3].

Pour tout $d > 1$, $H > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I(d; H; n) = \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{nh_n} M_n(0) i M_n \frac{d^i H}{nh_n}$ et, pour $\Phi \in]0; b]$, $N(\Phi; d; H) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{d^i H}{nh_n} \Phi; nh_n \geq 1$ et $h_n \geq 1$.

Montrons que, pour $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ et $d > 1$, il existe $H_0 > 0$ telle que $\forall H \geq H_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_{\text{B}} \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{nh_n} M_n(0) i M_n \frac{d^i H}{nh_n} > \frac{C}{(d^2)^i H^2} \quad (30)$$

On a :

$$P_{\text{B}} \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{nh_n} M_n(0) i M_n \frac{d^i H}{nh_n} > \frac{C}{(d^2)^i H^2} \quad \times \quad P_{\text{B}} \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{nh_n} M_n(0) i M_n \frac{d^i H}{nh_n} > \frac{C}{(d^2)^i H^2}$$

Or, le lemme 4 implique qu'il existe C , une constante finie qui ne dépend que de a et b , telle que :

$$8n \leq N(b; d; H); \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad I(d; H; n) \geq \frac{C}{(d^2)^i H^2}$$

D'où :

$$8n \leq N(b; d; H); \quad P_{\text{B}} \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{nh_n} M_n(0) i M_n \frac{d^i H}{nh_n} > \frac{C}{(1 + d^i)^2 H^2}$$

Pour obtenir le résultat souhaité (30), il suffit de prendre $H \geq H_0 = \frac{C}{(1 + d^i)^2}$.

Nous allons montrer que, pour $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ et $d > 1$, il existe $H_0 > 0$ telle que, $\forall H \geq H_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_{\text{B}} \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{nh_n} M_n(0) i M_n \frac{d^i H}{nh_n} > \frac{C}{(d^2)^i H^2} \quad (31)$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{nh_n} M_n(0) i M_n \frac{d^i H}{nh_n} = \frac{1}{(d^2)^i H^2} M_n(0) i M_n \frac{d^i H}{nh_n}$$

$$\frac{1}{(d^2)^i H^2} M_n(0) i M_n \frac{d^{i+1} H}{nh_n} = \frac{d^i (d-1) H}{(d^2)^i H^2} M_n(0) i M_n \frac{d^i H}{nh_n}$$

Or, par application des lemmes 4 et 7, on sait qu'il existe une constante C telle, indépendante de n, i, H et d , telle que :

$$E \leq \frac{1}{r^2} \sup_{\substack{h \\ \frac{h}{nh_n} \leq \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{nh_n} \right)^{d^{i+1}} + \frac{1}{r^2} \sup_{\substack{h \\ \frac{h}{nh_n} \leq \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{nh_n} \right)^{d^i} \frac{1}{nh_n} \leq C \frac{1}{(d^i H)^2} \frac{1}{(nh_n)^4} \frac{1}{d^i} \frac{1}{nh_n} \leq C \frac{1}{(d^i H)^2} \frac{1}{(nh_n)^4} \frac{1}{d^i} \frac{1}{nh_n}$$

D'où :

$$E \leq \frac{1}{r^2} \sup_{\substack{h \\ \frac{h}{nh_n} \leq \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{nh_n} \right)^{d^{i+1}} + \frac{1}{r^2} \sup_{\substack{h \\ \frac{h}{nh_n} \leq \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{nh_n} \right)^{d^i} \frac{1}{nh_n} \leq C \frac{1}{(d^i H)^2} \frac{1}{(nh_n)^4} \frac{1}{d^i} \frac{1}{nh_n} \leq C \frac{1}{(d^i H)^2} \frac{1}{(nh_n)^4} \frac{1}{d^i} \frac{1}{nh_n}$$

Or, nous avons $N(b; d; H) :$

$$E \leq \frac{1}{r^2} \sup_{\substack{h \\ \frac{h}{nh_n} \leq \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{nh_n} \right)^{d^{i+1}} + \frac{1}{r^2} \sup_{\substack{h \\ \frac{h}{nh_n} \leq \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{nh_n} \right)^{d^i} \frac{1}{nh_n} \leq C \frac{1}{(d^i H)^2} \frac{1}{(nh_n)^4} \frac{1}{d^i} \frac{1}{nh_n} \leq C \frac{1}{(d^i H)^2} \frac{1}{(nh_n)^4} \frac{1}{d^i} \frac{1}{nh_n}$$

où $C < 1$ est indépendante de n, i, d et H . En appliquant l'inégalité de Markov à l'ordre 1, on montre que, pour $\epsilon > 0$ et $n \geq N(b; d; H) :$

$$P \leq \frac{1}{r^2} \sup_{\substack{h \\ \frac{h}{nh_n} \leq \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{nh_n} \right)^{d^{i+1}} + \frac{1}{r^2} \sup_{\substack{h \\ \frac{h}{nh_n} \leq \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{nh_n} \right)^{d^i} \frac{1}{nh_n} \leq C \frac{1}{(d^i H)^2} \frac{1}{(nh_n)^4} \frac{1}{d^i} \frac{1}{nh_n} \leq C \frac{1}{(d^i H)^2} \frac{1}{(nh_n)^4} \frac{1}{d^i} \frac{1}{nh_n} \quad (32)$$

Il suffit alors de prendre $H \geq \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{d^i} \frac{1}{nh_n}$ pour obtenir (31).

Enfin, on remarque que, pour tout $\epsilon \in]0; b[$, $H > 0$ et $d > 1$, $8n \geq N(\epsilon; d; H)$, on a :

$$\frac{1}{r^2} \sup_{\substack{h \\ \frac{h}{nh_n} \leq \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{nh_n} \right)^{d^{i+1}} + \frac{1}{r^2} \sup_{\substack{h \\ \frac{h}{nh_n} \leq \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{nh_n} \right)^{d^i} \frac{1}{nh_n} \leq C \frac{1}{(d^i H)^2} \frac{1}{(nh_n)^4} \frac{1}{d^i} \frac{1}{nh_n} \leq C \frac{1}{(d^i H)^2} \frac{1}{(nh_n)^4} \frac{1}{d^i} \frac{1}{nh_n}$$

(30) et (31) impliquent donc (12). \square

F Démonstration du lemme 10

Soient $\epsilon \in]0; b[$ et $H > 0$ quelconques. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{H}{nh_n} \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sup_{\substack{\epsilon, r, \frac{H}{nh_n} \\ \frac{H}{nh_n}}} \frac{1}{nh_n} \frac{R_n(r)}{r^2} \leq \frac{1}{H} \sup_{\substack{\epsilon, r, \frac{H}{nh_n} \\ \frac{H}{nh_n}}} \frac{R_n(r)}{r}$$

Or, d'après le lemme 5-(11), on sait qu'il existe C qui ne dépend que de a et b telle que :

$$\sup_{\substack{\epsilon, r, \frac{H}{nh_n} \\ \frac{H}{nh_n}}} \frac{1}{nh_n} \frac{R_n(r)}{r} \leq C nh_n^2$$

On en déduit que :

$$\sup_{\substack{\epsilon, r, \frac{H}{nh_n} \\ \frac{H}{nh_n}}} \frac{1}{nh_n} \frac{R_n(r)}{r^2} \leq \frac{C}{H} \frac{1}{nh_n^3}$$

Par hypothèse, la suite $\frac{1}{nh_n^3}$ est bornée. Si on note $M > 0$ cette borne, on a par application de l'inégalité de Markov à l'ordre 1 :

$$\mathbb{P} \left(\sup_{\substack{\epsilon, r, \frac{H}{nh_n} \\ \frac{H}{nh_n}}} \frac{1}{nh_n} \frac{R_n(r)}{r^2} > \frac{C}{H} M \right) \leq \frac{C}{H} M$$

Pour obtenir (13), il suffit de prendre $H \geq H_0 = \frac{C}{\epsilon} M$.

G Démonstration du théorème 4

Si on montre que, pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j \right| > \epsilon \right) = 0$, alors $\frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j$ converge en loi vers la loi limite de $\sum_{j=1}^n \epsilon_j$ et on aura le résultat annoncé.

Pour tout $A > 0$, on a :

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j \right| > \epsilon \right) \leq \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j \right| > A \right) + \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j \right| > \epsilon; \left| \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j \right| \leq A \right)$$

La condition 1 du théorème 4 implique que :

$\exists \delta > 0, \exists A_1 = A_1(\delta)$ et $\exists n_1 = n_1(\delta)$ tels que, $\forall n \geq n_1, \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j \right| > A_1 \right) \leq \delta$.

La tension de la suite $\frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j$ implique que :

$\exists \delta > 0, \exists A_2 = A_2(\delta)$ et $\exists n_2 = n_2(\delta; A_2)$ tels que, $\forall n \geq n_2, \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j \right| > A_2 \right) \leq \delta$.

Montrons que :

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j \right| > \epsilon; \left| \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j \right| \leq A; \left| \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j \right| \leq A \right) \leq \mathbb{P} \left(\sup_{|u| \leq A} |j^n(u)| \geq \frac{\epsilon^2}{2} \right)$$

On a :

$$\mathbb{P} \left(\sup_{|u| \leq A} |j^n(u)| \geq \frac{\epsilon^2}{2} \right) \leq \mathbb{P} \left(\inf_{|u| \leq A} \frac{Z_n(u)}{2I(0)} \leq \frac{Z_n(u)}{2I(0)} \leq u \epsilon_n + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2I(0)} \sup_{|u| \leq A} |j^n(u)| \right) \quad (33)$$

Or, sous $\mathbb{P}^{\otimes n}$, on a :

$$\inf_{j \in A} \frac{Z_n(u)}{2I(0)} = \frac{Z_n(i \mathbb{P}_{nh_n b_n})}{2I(0)}$$

Sous $\mathbb{P}^{\otimes n}$, $\mathbb{P}^{\otimes n}(\mathbb{P}_{nh_n b_n} + \mathbb{C}_n > \pm) \geq \frac{1}{2}$,

$$\frac{Z_n(i \mathbb{P}_{nh_n b_n})}{2I(0)} \geq \frac{\pm^2}{2} + \frac{\mathbb{C}_n^2}{2} + \frac{1}{2I(0)} \sup_{j \in A} |j^a_n(u)|$$

Compte tenu de (33), on obtient, sous $\mathbb{P}^{\otimes n}$, $\mathbb{P}^{\otimes n}(\mathbb{P}_{nh_n b_n} + \mathbb{C}_n > \pm) \geq \frac{1}{2}$:

$$\frac{\pm^2}{2} + \frac{\mathbb{C}_n^2}{2} + \frac{1}{2I(0)} \sup_{j \in A} |j^a_n(u)| \leq \mathbb{C}_n^2 + \frac{\mathbb{C}_n^2}{2} + \frac{1}{2I(0)} \sup_{j \in A} |j^a_n(u)|$$

Donc :

$$\mathbb{P}^{\otimes n}(\mathbb{P}_{nh_n b_n} + \mathbb{C}_n > \pm) \geq \frac{1}{2} \left(\sup_{j \in A} |j^a_n(u)| \leq I(0) \frac{\pm^2}{2} \right)$$

On a l'inégalité annoncée.

La condition 2 implique alors que $\delta_{\pm} > 0$, $\delta'' > 0$, $\delta_A > 0$, $\eta_{n_3} = n_3(\cdot; \pm; A)$ tel que, $\delta_{n_3} \leq n_3$
 $\mathbb{P}^{\otimes n}(\mathbb{P}_{nh_n b_n} + \mathbb{C}_n > \pm; \mathbb{P}_{nh_n b_n} \leq A; j \in A) \geq \frac{1}{2}$.

Pour $\pm > 0$ et $\delta'' > 0$, on pose $A_0 = \max\{A_1, A_2\}$ et $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3(A_0)\}$.

Pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^{\otimes n}(\mathbb{P}_{nh_n b_n} + \mathbb{C}_n > \pm) \\ & \geq \mathbb{P}^{\otimes n}(\mathbb{P}_{nh_n b_n} > A_0) + \mathbb{P}^{\otimes n}(j \in A) + \mathbb{P}^{\otimes n}(\mathbb{P}_{nh_n b_n} + \mathbb{C}_n > \pm; \mathbb{P}_{nh_n b_n} \leq A; j \in A) \\ & \geq \mathbb{P}^{\otimes n}(\mathbb{P}_{nh_n b_n} > A_2) + \mathbb{P}^{\otimes n}(j \in A_1) + \mathbb{P}^{\otimes n}(\mathbb{P}_{nh_n b_n} + \mathbb{C}_n > \pm; \mathbb{P}_{nh_n b_n} \leq A; j \in A) \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\pm > 0$ et tout $\delta'' > 0$, il existe n_0 tel que, $\delta_{n_3} \leq n_0$,

$$\mathbb{P}^{\otimes n}(\mathbb{P}_{nh_n b_n} + \mathbb{C}_n > \pm) \geq \frac{1}{2}$$

□